National Seminar on Control and Optimization
Nov 13-14, 2019
سومین سمینار ملی کنترل و بهینه‌سازی
۲۲-۲۳ آبان ۱۳۹۸

ناحیه جواب جدید برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای

سیده فرخنده طیب نسب [1] *، فرهاد حمیدی [2]، و مهدی الله دادی[3]

[1,2,3] گروه ریاضی ، دانشکده ریاضی ، دانشگاه سیستان و بلوچستان
f.tayebnasab@pgs.usb.ac.ir
f_hamidi@math.usb.ac.ir
M_allahdadi@math.usb.ac.ir

چکیده. در این مقاله یک نوع مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای $(IBLP)$ که در آن تمام ضرایب در توابع هدف و محدودیت‌ها به صورت بازه‌ای بیان شده‌اند را بررسی می‌کنیم. هدف از این مقاله توسعه یک روش جدید برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای می باشد به طوری‌که شدنی بودن فضای حاصل را تضمین می‌کند. در حل مسائل $IBLP$ ممکن است برخی جواب‌های حاصل نشدنی باشد. برای حل این مشکل وقتی مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه تماما بازه‌ای را به دو زیر مسئله قطعی تبدیل می‌کنیم، با افزودن قیود به زیر مسائل، شدنی بودن ناحیه جواب حاصل را تضمین می کنیم.

۰. مقدمه

در مسائل بهینه سازی تحت قطعیت ممکن است تصمیم گیری به صورت متمرکز و توسط یک تصمیم گیرنده نباشد بلکه تعدادی تصمیم گیرنده موجود باشند، این نوع از مسائل را مسائل بهینه سازی نامتمرکز با ساختار سلسله مراتبی می نامند. یکی از مشهورترین مدل‌های این دسته از مسائل، برنامه‌ریزی خطی دو ترازه BLP می‌باشد. در این مدل تصمیم‌گیرنده در تراز بالایی (پیشرو) و دیگری در تراز پایینی (دنباله‌رو) موجودند که هر کدام تابع هدف خودشان را دارند و حتی ممکن است متضاد باشند. مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه خیلی نزدیک به مسئله‌ای است که اولین بار توسط ستکلبرگ [۱] در سال ۱۹۵۲ برای حل مسائل مدیریتی نامتمرکز با ساختار سلسله مراتبی در زمینه‌ی نظریه‌ی بازی‌ها ارائه شد. فرمول‌بندی برنامه‌ریزی دو ترازه اولین بار توسط براکن و مکگیل [۲] انجام شد. روش‌های حل مختلفی برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه ارائه شده است. مانند بهترین k−ام[۳]، شاخه و کران[۴]، لولای مکمل[۵] ، تابع جریمه[۶]، و الگوریتم ژنتیک[۷،۸]. با این حال، در عمل، در برخی مواقع با مسائلی مواجه می‌شویم که در آن ضرایب مسئله برنامه‌ریزی دو ترازه نادقیق هستند. برای مقابله با این ضرایب نادقیق، رویکردهای بازه‌ای و فازی به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند و به همین ترتیب، برنامه‌ریزی فازی و برنامه‌ریزی بازه‌ای دو استراتژی نوید دهنده برای مقابله با عدم قطعیت پارامترها در مسائل برنامه‌ریزی دو ترازه می‌باشند.

واژگان کلیدی. برنامه‌ریزی خطی دو ترازه ، ضرایب بازه‌ای، بهترین و بدترین مقدار بهینه. .
* سخنران

۲. پیش نیازها تعاریف

در این بخش بعضی از مفاهیم و تعاریفی که بعدا به آن نیاز داریم را مرور خواهیم کرد.

تعریف ۱.۲. یک عدد بازه‌ای به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$a^{\mp} = [a^-, a^+] = \{t | a^- \leq t \leq a^+ t \in R\}$$

اگر $a^- = a^+$ آنگاه $a^{\pm}$ را تباهیده گوییم که در این صورت عدد بازه‌ای $a^{\pm}$ تبدیل به عدد حقیقی می‌شود.

تعریف ۲.۲. قدر مطلق $|a^{\pm}| = |[a^-, a^+]|$ از یک عدد بازه ای $[a^-, a^+]$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|[a^-, a^+]|^+ = \begin{cases} a^+, & [a^-, a^+] \geq 0 \\ -a^-, & [a^-, a^+] < 0. \end{cases}$$

$$|[a^-, a^+]|^- = \begin{cases} a^-, & [a^-, a^+] \geq 0 \\ -a^+, & [a^-, a^+] < 0. \end{cases}$$

$$|[a^-, a^+]| = \begin{cases} a^{\pm}, & [a^-, a^+] \geq 0 \\ -a^{\pm}, & [a^-, a^+] < 0. \end{cases}$$

تعریف ۳.۲. $sign([a_{kj}^-, a_{kj}^+])$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$sign([a_{kj}^-, a_{kj}^+]) = \begin{cases} 1, & [a_{kj}^-, a_{kj}^+] \geq 0 \\ -1, & [a_{kj}^-, a_{kj}^+] < 0. \end{cases}$$

$IBLP$ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\underset{x}{Max}\, F(x,y) = \sum_{j=1}^{p} [c_j^{1-}, c_j^{1+}] x_j + \sum_{i=1}^{q} [d_i^{1-}, d_i^{1+}] y_i \\
s.t.& \\
&\underset{y}{Max}\, f(x,y) = \sum_{j=1}^{p} [c_j^{2-}, c_j^{2+}] x_j + \sum_{i=1}^{q} [d_i^{2-}, d_i^{2+}] y_i \\
s.t.& \\
&\sum_{j=1}^{p} [a_{kj}^-, a_{kj}^+] x_j + \sum_{i=1}^{q} [b_{ki}^-, b_{ki}^+] y_i \leq [b_k^-, b_k^+], k = 1, 2, ..., m. \\
&x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., p. y_i \geq 0, i = 1, 2, ..., q.
\end{aligned} \tag{۱.۲}$$

که $j = 1, 2, ..., r$، $c_j^{1-} \geq 0$ و $c_j^{2-} \geq 0$ و برای $j = r+1, ..., p$، $c_j^{1+} < 0$ و $c_j^{2+} < 0$ و $i = 1, ..., q$، $d_i^{1+} < 0$، $d_j^{2+} < 0$ می‌باشد. حال روش جدیدی برای حل مسائل $IBLP$ بیان می‌کنیم. تعیین مجموعه

بهین مسئله $IBLP$ یک مسئله بسیار مهم می‌باشد. مسائل مربوط به بهترین و بدترین مقدار بهینه‌ی تابع هدف پیشرو مربوط به مسئله (1.2) به ترتیب عبارتنداز:

$$
\begin{aligned}
&\underset{x}{Max}\, F^{+}(x,y)=\sum_{j=1}^{r} c_j^{1+}x_j^{+}+\sum_{j=r+1}^{p} c_j^{1+}x_j^{-}+\sum_{i=1}^{q} d_i^{1+}y_i^{-}\\
&s.t.\\
&\underset{y}{Max}\, f^{+}(x,y)=\sum_{j=1}^{r} c_j^{2+}x_j^{+}+\sum_{j=r+1}^{p} c_j^{2+}x_j^{-}+\sum_{i=1}^{q} d_i^{2+}y_i^{-}\\
&s.t.\\
&\sum_{j=1}^{r} sign([a_{kj}^{-},a_{kj}^{+}])|[a_{kj}^{-},a_{kj}^{+}]|^{-}x_j^{+}+\sum_{j=r+1}^{p} sign([a_{kj}^{-},a_{kj}^{+}])|[a_{kj}^{-},a_{kj}^{+}]|^{+}x_j^{-}\\
&+\sum_{i=1}^{t} sign([b_{kj}^{-},b_{kj}^{+}])|[b_{kj}^{-},b_{kj}^{+}]|^{-}y_j^{+}+\sum_{j=t+1}^{q} sign([b_{kj}^{-},b_{kj}^{+}])|[b_{kj}^{-},b_{kj}^{+}]|^{+}y_j^{-}\leq b_k^{+},k=1,2,...,m.\\
&x_j^{+},x_j^{-}\geq 0,j=1,2,...,p.y_i^{-}\geq 0,i=12,...,q.
\end{aligned}
\tag{۲.۲}
$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{x}{Max}\, F^{-}(x,y)=\sum_{j=1}^{r} c_j^{1-}x_j^{-}+\sum_{j=r+1}^{p} c_j^{1-}x_j^{+}+\sum_{i=1}^{q} d_i^{1-}y_i^{+}\\
&s.t.\\
&\underset{y}{Max}\, f^{+}(x,y)=\sum_{j=1}^{r} c_j^{2-}x_j^{-}+\sum_{j=r+1}^{p} c_j^{2-}x_j^{+}+\sum_{i=1}^{q} d_i^{2-}y_i^{+}\\
&s.t.\\
&\sum_{j=1}^{r} sign([a_{kj}^{-},a_{kj}^{+}])|[a_{kj}^{-},a_{kj}^{+}]|^{+}x_j^{-}+\sum_{j=r+1}^{p} sign([a_{kj}^{-},a_{kj}^{+}])|[a_{kj}^{-},a_{kj}^{+}]|^{-}x_j^{+}\\
&+\sum_{i=1}^{t} sign([b_{kj}^{-},b_{kj}^{+}])|[b_{kj}^{-},b_{kj}^{+}]|^{+}y_j^{-}+\sum_{j=t+1}^{q} sign([b_{kj}^{-},b_{kj}^{+}])|[b_{kj}^{-},b_{kj}^{+}]|^{-}y_j^{+}\leq b_k^{-},k=1,2,...,m.\\
&x_j^{-}\leq x_{jopt}^{+},j=1,2,...,r.x_j^{+}\geq x_{jopt}^{-},j=k+1,...,p.y_i^{-}\leq y_{jopt}^{+},i=1,2,...,t.\\
&y_j^{+}\geq y_{jopt}^{-},i=t+1,...,q.x_j^{+},x_j^{-}\geq 0,j=1,2,...,p.y_i^{+}\geq 0,i=1,2,...,q.
\end{aligned}
\tag{۳.۲}
$$

که برای $j=12,...,$، $c_j^{1-}\geq 0$و $c_j^{2-}\geq 0$ و برای $j=+1,...,p.$، $c_j^{1+}<0$ و $c_j^{2+}<0$ و برای $i=1,2,...,q$، $d_i^{1+}<0$،$d_i^{2+}<0$.

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله برای مسئله $IBLP$ یک روش جدید ارائه شده است. یک نقطه، جواب شدنی مسئله $IBLP$ می‌باشد اگر در قیود مدل بهترین که بزرگترین ناحیه شدنی را شامل می‌شود صدق کند.در روش جدید مسئله

$IBLP$ به دو زیر مسئله بهترین و بدترین برنامه‌ریزی خطی دو ترازه قطعی تبدیل شده است. سپس با افزودن قیودی به زیر مسئله بدترین، شدنی بودن جواب‌های حاصل تضمین می‌گردد.

مراجع

1. H. Von Stackelberg, The theory of the market economy, Oxford University Press, New York, Oxford, 1952.
2. J. Bracken and J. McGill, Mathematical programs with optimization problems in the constraints, Operations Research, 21(1973), 37–44.
3. W. Bialas and M. Karwan, Two level linear programming, Management Science 30(1984),1004–1020.
4. J. Bard and J. Moore, A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 11(2)(1990), 281–292.
5. J. Judice and A. Faustino, A sequential LCP method for bilevel linear programming, Annals of Operations Research 34(1992), 89–106.
6. Y. Lv, T. Hu, G. Wang and Z. Wan, A penalty function method based on Kuhn-Tucker condition for solving linear bilevel programming, Applied mathematics and computation 188(2007), 808-813.
7. H. I. Calvete and C. Galé, and P. M. Mateo. A new approach for solving Linear bilevel programs using genetic algorithms, European Journal of Operational Research 188(2008), 14-28.
8. R. J. Kuo and Y. S. Han, A hybrid of genetic algorithm and particle swarm optimization for solving bi-level linear programming problem – A case study of supply chain model. Applied Mathematical Modelling 35(2011), 3905-3917.