



حل مسئله برنامه‌ریزی خطی سه ترازه با استفاده از الگوریتم دو رگه

سیده فرخنده طیب نسب^{1*}، فرهاد حمیدی²، و مهدی الله دادی³

^{1,2,3} گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

f.tayebnasab@pgs.usb.ac.ir

f_hamidi@math.usb.ac.ir

M_allahdadi@math.usb.ac.ir

چکیده. در این مقاله ابتدا مسئله برنامه‌ریزی خطی سه ترازه که تعمیمی از مسئله برنامه‌ریزی خطی دو ترازه می‌باشد را بیان می‌کنیم. در واقع در مسائل سه ترازه میان تصمیم‌گیرنده‌ها تاثیر متقابل وجود دارد و قدرت تصمیم‌گیری از بالا به پایین می‌باشد. در این مقاله برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی سه ترازه یک الگوریتم دو رگه بیان می‌کنیم.

۱. مقدمه

برنامه‌ریزی سه ترازه روشی است توسعه یافته برای مسائل تصمیم‌گیری نامتمرکز، شامل تصمیم‌گیرنده‌هایی که در سراسر سلسله مراتب سه ترازه توزیع شده‌اند و زیر خانواده‌ای از برنامه‌ریزی چند ترازه [۱] می‌باشد که از نظریه بازی استکلبرگ نشأت گرفته شده است [۲]. تصمیم‌گیری سه ترازه در یک سلسله مراتب سه ترازه، برای دستیابی به تعامل و سازش میان تصمیم‌گیرنده‌ها به وجود آمده است که در آن تصمیم‌گیرنده‌ها به ترتیب در تراز بالایی، پیشرو و در تراز میانی و پائینی، دنباله‌رو نامیده می‌شوند. تصمیم‌گیرنده‌ها، تصمیم شخصی خود را به ترتیب از تراز بالایی به تراز میانی و سپس تراز پائینی با هدف بهینه‌سازی اهدافشان اتخاذ می‌کنند [۳]. در مطالعات موجود از برنامه‌ریزی سه ترازه، به طور عمده نتایج بر مدل خطی آن متمرکز شده‌اند. به عنوان مثال بارد و فالک [۴] شرایط لازم بهینگی را برای مسائل برنامه‌ریزی خطی سه ترازه را بر پایه‌ی نظریه بازی استکلبرگ بیان نمودند و پس از آن مجموعه‌های واکنش منطقی را برای هر یک از تصمیم‌گیرنده‌ها تعمیم دادند و الگوریتم صفحه برش را برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی سه ترازه ($LTLP$) ارائه کردند. علاوه بر این وایت [۵] روش تابع جریمه را برای مسائل $LTLP$ معرفی نموده است. همچنین روش‌های کان-تاکر [۶]، الگوریتم شاخه و کران [۷] و الگوریتم بهترین-ام [۸]، برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دو ترازه نیز برای حل مسائل $LTLP$ تعمیم داده شده‌اند.

واژگان کلیدی. برنامه‌ریزی خطی دو ترازه، برنامه‌ریزی خطی سه ترازه، الگوریتم دو رگه.

* سخنران

۲. پیش نیازها تعاریف

در یک مسئله‌ی تصمیم‌گیری سلسله مراتبی سه ترازه، هر تصمیم‌گیرنده در هر تراز، هدف خود را تعیین نموده و متغیرهای آن‌ها در هر تراز توسط تصمیم‌گیرنده‌های همان تراز کنترل می‌شوند. انتخاب مقادیر برای متغیرهای هر تراز می‌تواند بر تصمیمات گرفته شده در ترازهای دیگر تاثیر بگذارد، در نتیجه منجر به تغییر در تابع هدف هر تراز شود. ابتدا مسئله برنامه‌ریزی خطی سه ترازه را که تعمیمی از برنامه‌ریزی خطی دو ترازه می‌باشد معرفی می‌کنیم. مسئله برنامه‌ریزی خطی سه ترازه به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 level3 \quad & \max (f_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 : (x_3)) \\
 level2 \quad & s.t. : \max (f_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 : (x_2|x_3)) \\
 level1 \quad & s.t. : \max (f_1 = c_{11}x_1 : (x_1|x_2, x_3)) \\
 s.t. : \quad & Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 \leq b \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

$S_1 = \{x : Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 \leq b\}$ مجموعه‌ای محدب از R^n می‌باشد که $x = (x_1, x_2, x_3)$ و $n = n_1 + n_2 + n_3$.

$S_2 = \{x : x \in S_1 \cap \{x \in R^n | c_{11}\hat{x}_1 = \max(f_1 = c_{11}x_1 : (x_1|\hat{x}_2, \hat{x}_3))\}\}$ واکنش‌های منطقی f_1 روی S_1 می‌باشد، که لازم نیست محدب باشد.
 $S_3 = \{x : x \in S_2 \cap \{x \in R^n | c_{21}\hat{x}_1 + c_{22}\hat{x}_2 = \max(f_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 : (x_2|\hat{x}_3))\}\}$ مجموعه واکنش‌های منطقی f_2 روی S_3 نامیده می‌شود، که لازم نیست محدب باشد.
 بنابراین برنامه‌ریزی خطی سه ترازه را می‌توانیم به صورت زیر نشان دهیم:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & (c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 : (x_3)) \\
 s.t. : \quad & (c_{21}x_1 + c_{22}x_2 : (x_2|x_3)) \\
 & s.t. : x \in S_2
 \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}
 \max \quad & (c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 : (x_3)) \\
 s.t. : \quad & x \in S_3
 \end{aligned}$$

که در واقع بهینه‌سازی تابع خطی روی یک ناحیه نامحدب می‌باشد.

قضیه ۱.۲. اگر x نقطه S_3 راسی باشد، آن‌گاه x نقطه راسی S_2 و نیز S_1 می‌باشد.
 برهان: به [۸] مراجعه کنید.

۳. الگوریتم دو رگه

در این بخش یک روش جدید دو رگه بیان می‌کنیم.

گام ۱. قرار دهید $k = 1$ و $\alpha = 0$. برای بدست آوردن جواب بهین $\hat{x}_{[1]}$ ، مسئله (T_1) را به روش سیمپلکس حل کنید. فرض کنید $T = \emptyset$ و $w = \{\hat{x}_{[1]}\}$ برو به گام ۲.

$$\begin{aligned}
 (T_1) : \quad & \max (c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 : (x_3)) \\
 s.t. : \quad & x \in S_1
 \end{aligned}$$

گام ۲. مسئله (T_1) را با روش سیمپلکس کراندار حل کنید.

$$(T_2) : \quad \max \quad c_{11}x_1 \\ s.t. : \quad x \in S_1 \cap \{x \in R^n | x_2 = \hat{x}_2, x_3 = \hat{x}_3\}$$

فرض کنید این مسئله دارای جواب بهین $(\bar{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ باشد. اگر $\bar{x}_1 \neq \hat{x}_1$ ، پس $\hat{x} \notin S_2$ ، بنابراین $\hat{x}$ در S_3 نیست، برو به گام ۳. اگر $\bar{x}_1 = \hat{x}_1$ ، پس $\hat{x} \in S_2$ ، برو به گام ۵.

گام ۳. فرض کنید $W_{[k]}$ نشان دهنده‌ی مجموعه‌ای از نقاط راسی x مجاور به $\hat{x}_{[k]}$ باشد به طوریکه $c_3x \leq c_3\hat{x}_{[k]}$ ، W, T را به صورت زیر بهنگام کنید.

$$T = T \cup \{\hat{x}_{[k]}\}, W = (W \cup W_{[k]}) \setminus T$$

گام ۴. قرار دهید $k = k + 1$ و $\hat{x}_{[k]}$ را انتخاب کنید به طوریکه $c_3\hat{x}_{[k]} = \max\{c_3x\}$ ، برو به گام ۲، $(x \in W)$.

گام ۵. جواب بهین مسئله زیر را پیدا کنید:

$$(T_3) : \quad \max \quad c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \\ s.t. : \quad x \in S_1 \cap \{x \in R^n | x_3 = \hat{x}_3\}$$

فرض کنید مسئله دارای جواب بهین $(\hat{x}_1^*, \hat{x}_2^*, \hat{x}_3)$ باشد. با حل کردن مسئله زیر تعلق داشتن نقطه $(\hat{x}_1^*, \hat{x}_2^*)$ را در S_2 بررسی کنید:

$$(T_4) : \quad \max \quad c_{11}x_1 \\ s.t. : \quad x \in S_1 \cap \{x \in R^n | x_2 = \hat{x}_2, x_3 = \hat{x}_3\}$$

جواب بهین $(\bar{x}_1, \hat{x}_2^*, \hat{x}_3)$ بدست می‌آید. اگر $\bar{x}_1 = \hat{x}_1^*$ آنگاه جواب (T_3) در S_2 می‌باشد، برای چک S_3 برو به گام ۶. اگر $\bar{x}_1 \neq \hat{x}_1^*$ ، آنگاه جواب (T_3) در S_2 نیست، قرار دهید: $\alpha = c_{21}\hat{x}_1 + c_{22}\hat{x}_2$ ، برو به گام ۷.

گام ۶. اگر $(\hat{x}_1^*, \hat{x}_2^*) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ ، آنگاه $\hat{x} \in S_3$ و بنابراین $\hat{x}$ جواب بهین مسئله سه ترازه است و توقف کنید. در غیر این صورت، $\hat{x} \notin S_3$ ، برو به گام ۳.

گام ۷. سیستم زیر را حل کنید:

$$(T_5) : Ax_1 + Bx_2 + y = b - Cx_3 \\ (A)^t u - \nu = (c_{11})' \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \geq \alpha + \delta \\ u^t y = 0, (x_1)^t \nu = 0 \\ x_1, x_2, y, u, \nu \geq 0.$$

که γ عدد مثبت به قدر کافی کوچک باشد. اگر نتوانیم جواب شدنی برای T_5 پیدا کنیم، در این صورت $(\hat{x}_1^*, \hat{x}_2^*)$ جواب مسئله دو ترازه می‌باشد که البته x_3 مقداری برابر $\hat{x}_3$ دارد، پس $\hat{x} \in S_3$ و $\hat{x}$ جواب بهین برای مسئله سه ترازه است و توقف. در غیر این صورت، $\hat{x} \notin S_3$ ، برو به گام ۳.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش جدید برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی سه ترازه بیان می‌کنیم. نحوه‌ی تصمیم‌گیری در مسائل سه ترازه، به گونه‌ای است که ابتدا تصمیم‌گیرنده تراز بالایی تحت مجموعه قیود مشخص تصمیمش را می‌گیرد، به تبعیت از آن تصمیم‌گیرنده‌ی تراز میانی با در نظر گرفتن مجموعه قیود تعیین شده تحت تاثیر تصمیم‌گیرنده‌ی تراز بالایی واکنش نشان می‌دهد، در نهایت تصمیم‌گیرنده‌ی تراز پائینی داخل مجموعه قیود تعیین شده تحت تاثیر دو تراز بالایی و میانی واکنش نشان می‌دهد. هدف از این مقاله بیان یک الگوریتم جدید برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی سه ترازه با بکار بردن الگوریتم بهترین-ام می‌باشد.

مراجع

1. Vicente, L., Calamai, P., Bilevel and multilevel programming: a bibliography review, J. Global Optim. 5 (1994) 291–306.
2. Stackelberg, H.V., Theory of the Market Economy, Oxford University Press, New York, 1952.
3. Zhang, G., Lu, J., Montero, J., Zeng, Y., Model, solution concept, and Kth-Best algorithm for linear trilevel programming, Inf. Sci. 180 (2010) 481–492.
4. Bard, J., Falk, J., Necessary conditions for the linear three-level programming problem, in: Proceedings of the 21st IEEE Conference on Decision and Control, vol. 21, 1982 pp. 642–646.
5. White, D., Penalty function approach to linear trilevel programming, Journal of Optimization Theory and Applications 93 (1997) 183–197.
6. Bard, J., Falk, J., An explicit solution to the multi-level programming problem, Computer and Operations Research 9 (1982) 77–100.
7. Hansen, P., Jaumard, B., Savard, G., New branch-and-bound rules for linear bilevel programming, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 13 (1992) 1194–1217.
8. Bialas, W., Karwan, M., Two-level linear programming, Management Science 30 (1984) 1004–1020.