



یک روش جدید برای حل مسائل برنامه ریزی چند جمله‌ای بازه‌ای

سمیه امیرمحمودی^{۱*}، حسن میش مست نهی^۲، و مهدی الله دادی^۳

^{1,2,3} گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان
amirmahmoodis@yahoo.com
hmnehi@hamoon.usb.ac.ir
m_allahdadi@math.usb.ac.ir

چکیده. در این مقاله یک نوع خاص از مسائل برنامه ریزی غیر خطی بازه‌ای (INLP) را (بنام چند جمله‌ای‌های بازه‌ای (IPP)) که در آنها ضرایب تابع هدف و قیدها به صورت بازه بیان شده‌اند، در نظر می‌گیریم. به طوری که متغیرها قطعی هستند و می‌توانند نامقید در علامت نیز باشند. به علاوه قیدها به فرم نامساوی در نظر گرفته می‌شوند. هدف از این مقاله ارائه یک روش جدید برای پیدا کردن دامنه‌ی تغییرات مقادیر بهینه تابع هدف بر اساس دو مسئله برنامه ریزی غیر خطی (NLP) قطعی می‌باشد. پیاده‌سازی روش روی مثال عددی توضیح داده می‌شود.

۱. پیش‌گفتار

در سال‌های اخیر، حل مسائل INLP بخش جالبی از تحقیقات شده است. لدیک [۱] دامنه‌ی تغییرات مقادیر بهینه تابع هدف را برای دو دسته خاص از مسائل INLP محاسبه کرده است. کومار و پاندا [۲] یک مدل INLP کلی را مطالعه کردند که در آن بازه‌ها به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند. لوین [۳، ۴] الگوریتمی برای یافتن مجموعه جواب‌های مسائل INLP ارائه داد. لی و زو [۵] یک رویکرد متفاوتی از کاربرد آنالیز بازه‌ای برای محاسبه دامنه‌ی تغییرات یک تابع روی متغیرهای بازه‌ای بررسی کرده‌اند. اکنون بعضی از تعاریف و مفاهیم مورد نیاز را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. تابع حقیقی مقدار نامنفی (یا نامثبت) f در دامنه‌ی تعریف $G \subseteq \mathbb{R}^n$ و بازه $\tilde{a} = [\underline{a}, \bar{a}]$ را در نظر بگیرید. ضرب بازه $\tilde{a} = [\underline{a}, \bar{a}]$ در تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{a} f(\mathbf{x}) = [\underline{a}, \bar{a}] f(\mathbf{x}) = \begin{cases} [\underline{a} f(\mathbf{x}), \bar{a} f(\mathbf{x})], & f(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in G \\ [\bar{a} f(\mathbf{x}), \underline{a} f(\mathbf{x})], & f(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in G \end{cases}$$

که $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. برنامه ریزی غیر خطی بازه‌ای، چند جمله‌ای بازه‌ای، دامنه تغییرات مقادیر بهینه.
* سخنران

تعریف ۲.۱. ([۳]) یک تابع بازه‌ای به وسیله یک بازه مشخص می‌شود که کران‌های بالا و پایین آن توابع حقیقی مقدار در دامنه‌ی تعریف $G \subseteq \mathbb{R}^n$ می‌باشند و به صورت $\tilde{f}(\mathbf{x}) = [h(\mathbf{x}), l(\mathbf{x})]$ نمایش داده می‌شود و برابر است با مجموعه $\{f(\mathbf{x}) \mid h(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq l(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in G\}$.

توجه ۳.۱. برای یک متغیر نامقید x (یا $x \in \mathbb{R}$)، می‌توان نوشت $x = x^+ - x^-$ که $x^+ = \max\{0, x\} \geq 0$ و $x^- = \max\{0, -x\} \geq 0$.

توجه ۴.۱. برای محاسبه x^n که x یک متغیر نامقید باشد می‌توان از قضیه دوجمله‌ای نیوتن استفاده کرد:

$$x^n = (x^+ - x^-)^n = (-x^- + x^+)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (x^-)^k (x^+)^{n-k},$$

که n و k اعداد صحیح نامنفی اند به طوری که $0 \leq k \leq n$.

یک مسأله IPP را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n [\underline{c}_j, \bar{c}_j] x_j^{n_j} \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{g}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}] x_j^{n_{ij}} \geq [\underline{b}_i, \bar{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (۱.۱)$$

که توان‌های n_j و n_{ij} اعداد صحیح نامنفی هستند.

اکنون با یک مثال عددی روش پیشنهادی را برای بدست بدست آوردن دامنه‌ی تغییرات مقادیر بهینه تابع هدف مسأله IPP (۱.۱) توضیح می‌دهیم.

مثال ۵.۱. مسأله IPP به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{f}(\mathbf{x}) = [-10, -9]x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{g}(\mathbf{x}) = [-3, -1]x_1^2 + [1, 5]x_2 - 2x_3 \geq [25, 29], \\ & x_1, x_2 \leq 0. \end{aligned} \quad (۲.۱)$$

می‌خواهیم دامنه‌ی تغییرات مقادیر بهینه تابع هدف را محاسبه کنیم.

ابتدا متغیر نامقید x_3 را به صورت $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ می‌نویسیم که $x_3^+ = \max\{0, x_3\} \geq 0$ و $x_3^- = \max\{0, -x_3\} \geq 0$. برای راحتی کار با متغیرها و حفظ ترتیب شماره متغیرها، به جای متغیر x_3 قرار دهیم $(x_3 - x_4)$ ، که در آن x_3 همان x_3^+ است و x_4 همان x_3^- می‌باشد. درنهایت، مسأله (۲.۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & [f(\mathbf{x}), \bar{f}(\mathbf{x})] = [-9x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3x_4 + x_4^2, -10x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3x_4 + x_4^2] \\ \text{s.t.} \quad & [g(\mathbf{x}), \bar{g}(\mathbf{x})] = [-3x_1^2 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4, -x_1^2 + x_2 - 2x_3 + 2x_4] \geq [25, 29], \\ & x_1, x_2 \leq 0, \quad x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned} \quad (۳.۱)$$

دامنه‌ی مقادیر بهینه تابع هدف برای مسأله (۳.۱) با استفاده از حل دو مسأله NLP کلاسیک زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \underline{f}(\mathbf{x}) = -9x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3x_4 + x_4^2 \\ \text{s.t.} \quad & \underline{g}(\mathbf{x}) = -x_1^2 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \geq 25, \\ & x_1, x_2 \leq 0, \quad x_3, x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \min \quad & \overline{f}(\mathbf{x}) = -10x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3x_4 + x_4^2 \\ \text{s.t.} \quad & \overline{g}(\mathbf{x}) = -3x_1^2 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 \geq 29, \\ & x_1, x_2 \leq 0, \quad x_3, x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

که اولی دارای مقدار بهینه $\underline{f}^* = 156.25$ و دومی دارای مقدار بهینه $\overline{f}^* = 210.25$ می‌باشد. یعنی دامنه‌ی تغییرات مقادیر بهینه تابع هدف برای مسأله (۲.۱) به صورت $[\underline{f}^*, \overline{f}^*] = [156.25, 210.25]$ بدست می‌آید.

۲. دست‌آوردهای پژوهش

در این مقاله، مسأله IPP با قیدهای نامساوی معرفی شد که متغیرهای مسأله می‌توانستند نامقید نیز باشند. به علاوه، دامنه‌ی تغییرات مقادیر بهینه تابع هدف با استفاده از حل دو مسأله NLP کلاسیک بدست آورده شد. با ارائه مثال عددی، روش این مقاله پیاده سازی شد.

مراجع

1. M. Hladik, *Optimal value bounds in nonlinear programming with interval data*, 2011, **19** (2011) 93–106, DOI 10.1007/s11750-009-0099-y.
2. P. Kumar and G. Panda, *Solving nonlinear interval optimization problem using stochastic programming technique*, *OPSEARCH*, **54** (2017) 752–765, DOI 10.1007/s12597-017-0304-y.
3. V.I. Levin, *Nonlinear optimization under interval uncertainty*, *Cybernetics and Systems Analysis*, **35**(2) (1999).
4. V.I. Levin, *Optimization in Terms of Interval Uncertainty: The Determinization Method*, *Automatic Control and Computer Sciences*, **46**(4) (2012) 157–163, DOI 10.3103/S0146411612040050.
5. Y. Li and Y.L. Xu, *Increasing accuracy in the interval analysis by the improved format of interval extension based on the first order Taylor series*, *Mechanical systems and signal processing*, **104** (2018) 744–757.