



کنترل بهینه کسری مسأله خمیدگی میله با ماتریس عملگر انتگرال ریمان لیوویل و چندجمله‌ای‌های جیگنبر

الهام محمدی^{۱*}، محمود محمودی^۲

^۱گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

M.mahmoudi@qom.ac.ir

^۲گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

M.mahmoudi@qom.ac.ir

چکیده: در سال‌های اخیر محاسبات کسری به طور وسیعی در تحقیقات آکادمی به کار برده شده‌اند. استفاده از آن‌ها در طراحی کنترل کننده سبب افزایش درجه آزادی در طراحی شده و در نتیجه عملکرد کنترلی را بهبود می‌بخشد. یک مسأله تخصصی در مهندسی راه و ساختمان به خمیدگی میله با مقطع عرضی مستطیلی مربوط می‌شود که مقید به تحمل باری یکنواخت است. در این مقاله ابتدا مسأله مربوط به مقاومت سازه میله را در قالب مسأله کنترل بهینه کسری بیان می‌کنیم و سپس از ماتریس عملگر انتگرال ریمان لیوویل و چندجمله‌ای‌های جیگنبر با روش ضرایب لاگرانژی برای حل آن استفاده می‌کنیم. تکنیک استفاده شده مسأله مورد نظر را به مجموعه‌ای از معادلات غیرخطی که حل به مراتب آسان‌تری دارند تغییر شکل می‌دهد. هدف اصلی این مقاله تعیین آلیاژی برحسب مدول یانگ‌های مختلف جهت طراحی به صرفه‌ترین نوع میله در سازه‌های عمرانی است، تا دچار کمترین مقدار خمیدگی شود.

۱. پیش‌گفتار

در مهندسی راه و ساختمان، چگونگی رفتار یک عضو سازه بر اثر یک نیروی خارجی وارد شده به صورت عمود بر محور طولی آن توسط خمش توصیف و بیان می‌شود. مسأله‌ای که در این مقاله مورد بحث قرار می‌دهیم مسأله مربوط به خمیدگی یک میله است که باری یکنواخت را تحمل می‌کند، در حالی که دو انتهای میله چنان نگهداری می‌شوند که متحمل هیچ خمیدگی نمی‌شوند. کنترلی که در این مسأله اعمال می‌شود کنترل روی متغیر E یا همان مدول یانگ است که بصورت نسبت تنش به کرنش معرفی می‌شود. از طرفی در سال‌های اخیر عملگرهای ماتریسی گوناگونی برای چندجمله‌ای‌های مختلف همچون، چندجمله‌ای‌های چیشیف، لژاندر، ژاکوبی، برنشتاین و لاگور به منظور پوشش دهی حل عددی معادلات مرتبه کسری ایجاد شده‌اند [۲] و [۳] و [۴]. تکنیک حل مسأله در این مقاله نیز استفاده از عملگر ماتریسی انتگرال کسری ریمان لیوویل از چندجمله‌ای‌های جیگنبر است که این چندجمله‌ای‌ها تعمیمی از چندجمله‌ای‌های لژاندر و چندجمله‌ای‌های چیشیف و حالت خاصی از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی هستند.

۲. تعریف مسأله

در این بخش برخی تعاریف اولیه که برای حل مورد نیاز است را بیان می‌کنیم.

۲۰۱۰ Mathematics Subject Classification. Primary ۴۷A۵۵; Secondary ۳۹B۵۲, ۳۴K۲۰, ۳۹B۸۲.

واژگان کلیدی: خمیدگی میله، مسایل کنترل بهینه کسری، عملگر کسری انتگرال ریمان لیوویل، چندجمله‌ای جیگنبر

* الهام محمدی

تعریف ۲.۱ یکی از تعاریف مشهور انتگرال کسری، ریمان لیوویل است که از رابطه زیر بدست می آید:

$$I^v f(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t (t - \xi)^{v-1} f(\xi) d\xi.$$

$$m - 1 < v < m, m \in N, v > 0, t > 0 \quad (2.1)$$

خواص و قضایای مربوط به این انتگرال در [۵] آمده است.

تعریف ۲.۲ D^v مشتق کسری از مرتبه v به صورت زیر تعریف می شود:

$$D^v f(t) = \frac{d^m}{dx^m} (I^{m-v} f(t)).$$

$$m - 1 < v < m, m \in N, v \in R.$$

که m کوچکترین عدد صحیح بزرگ تر از v است.

قضیه ۱.۱ اگر $m - 1 < v < m$ و $m \in N$ آن گاه خواهیم داشت:

$$D^v I^v f(t) = f(t).$$

$$D^v I^v f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(0^+) \frac{t^i}{i!} \quad t > 0 \quad (2.2)$$

تعریف ۲.۳ چندجمله ای های جیگنبر $C_{s,j}^{(\alpha)}(t)$ از درجه $j \in \mathbb{Z}^+$ ، با پارامتر $\alpha > \frac{1}{p}$ ترتیبی از چندجمله ای های حقیقی در بازه ی متناهی $[0, L]$ اند. فرم تحلیلی این نوع چندجمله ای ها بصورت زیر است:

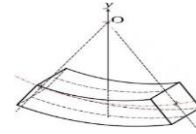
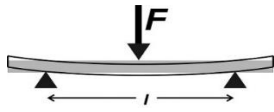
$$C_{s,j}^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{p}) \Gamma(j+k+2\alpha)}{\Gamma(k+\alpha+\frac{1}{p}) \Gamma(2\alpha) (j-k)! k! L^k} t^k \quad (2.3)$$

۳. بیان و حل مسأله

مسأله مربوط به خمیدگی میله توسط معادله دیفرانسیلی در [۱] که این وضعیت فیزیکی را تقریب می زند، بررسی می شود. این معادله دیفرانسیلی به فرم زیر است:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{S}{EI} w = \frac{1}{EI} q x (x - l). \quad (3.1)$$

که در آن $w = w(x)$ خمیدگی به فاصله x از انتهای چپ میله است و l, q, E, S و I به ترتیب معرف طول میله، فشار یکنواخت، مدول الاستیسته (مدول یانگ)، قدرت در نقاط انتهایی و ممان اینرسی مرکزی است. مدول یانگ یکی از مهمترین خواص مکانیکی حساس به ساختار است و هر چه این مدول بزرگ تر باشد کرنش الاستیک ناشی از اعمال یک تنش معین کمتر است. با فرض این که خمیدگی در دو انتهای میله رخ نمی دهد شرط $w(0) = w(l) = 0$ برای معادله (۱.۱) تعریف می شود. نحوه خمیدگی میله در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۱: خمیدگی میله (شکل سمت راست نمایی سه بعدی از یک میله است که در صفحه مختصات قرار داده شده است.)

حال مدل فوق را به صورت یک مسأله کنترل بهینه کسری در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\begin{aligned} \min J[w_j, e] &= \frac{1}{\gamma} \int_0^1 [w_j(x) - w_d(x)]^2 dx + \int_0^1 u^2(x) dx \\ \text{s.t. } \begin{cases} D^v w_j(x) = \left(\frac{S}{I} w_j(x) + \frac{q}{\gamma l} x(x-l) \right) u(x) \\ w(0) = w(l) = 0, \quad 1 \leq v \leq 2 \end{cases} \quad (3.2) \end{aligned}$$

توجه کنید که متغیر کنترلی U به صورت $U = \frac{1}{E}$ در نظر گرفته شده است. برای حل مسأله فوق ابتدا $D^v w_j(x)$ و $u(x)$ را با چندجمله‌ای جیگنبر $C_{s,k}^{(\alpha)}(x)$ که $k = 0, \dots, N$ است، تقریب می‌زنیم و خواهیم داشت:

$$D^v w_j(x) \simeq W_j^T \phi(x)$$

و

$$u(x) \simeq U^T \phi(x) \quad (3.3)$$

که W و U ماتریس‌های ضرایب مجهول‌اند که به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} \tilde{w}_{j,0} \\ \tilde{w}_{j,1} \\ \vdots \\ \tilde{w}_{j,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix}$$

با تقریب مسأله کنترلی با استفاده از فرمول (3.3) و روابط چندجمله‌ای جیگنبر و تعاریف ذکر شده و [۶] داریم:

$$\min J[w_j, e] = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 [(W_j^T P^v + B_j^T) \phi(x) - w_d(x) \phi(x)]^2 + [U^T \phi(x)]^2 dx \quad (3.4)$$

$$\text{s.t. } : W_j^T \phi(x) - Q_j^T(x) \phi(x) \phi^T(x) U = 0$$

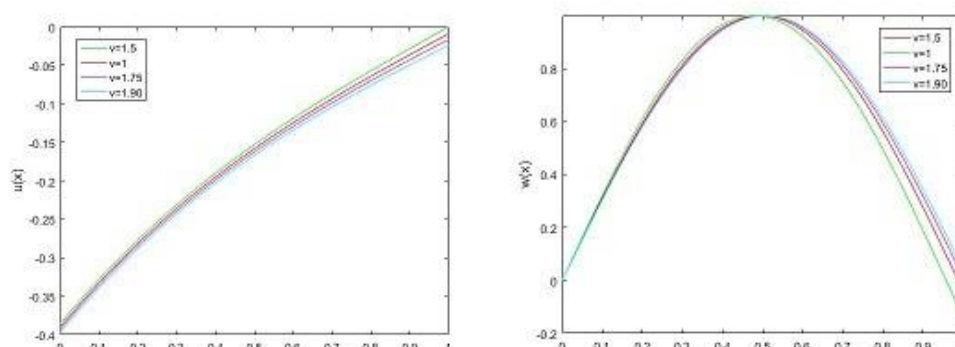
حال به منظور حل مسأله فوق از ضرایب لاگرانژ استفاده کرده و به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\bar{J}[W_j, U, \Lambda] \equiv J[W_j, U] + (W_j^T - H_j^T R) \Lambda \quad (3.5)$$

حال با بهره‌گیری از شرایط لازم کنترلی برای معادله (3.5) به سیستم غیرخطی زیر می‌رسیم.

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial W_j} = 0 \quad \cdot \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial U} = 0 \quad \cdot \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial \Lambda} = 0 \quad \cdot$$

و با استفاده از روش تکراری نیوتون ضرایب مجهول بردارهای W و U و Λ را بدست می‌آوریم. نتایج عددی حاصل در شکل (۲) نشان داده شده‌اند. رفتار جواب‌های تقریبی به ازای v های مختلف و همچنین جواب دقیق به ازای $v = 1$ برای بردارهای W و U می باشد.



شکل ۲: جواب های تقریبی به ازای v های $1/5, 1/75, 1/90$ و همچنین جواب دقیق به ازای $v = 1$ برای بردارهای $W(x)$ و $U(x)$.

۴. نتیجه گیری

مدول یانگ برخی از مواد در دمای 20° درجه سانتی گراد (68° درجه فارنهایت) در جدول زیر نشان داده شده است. واحدها در این جدول برحسب GPa می باشند. با مقایسه نتایج بدست آمده با داده های جدول به این نتیجه می رسیم که آلیاژی از جنس بتن بسیار مقاوم، فایبر گلاس و لوله های نانو پیپتید آروماتیک می تواند ترکیبی مناسب برای جلوگیری از خمیدگی بیش از حد میله شود.

جدول ۱: مدول یانگ برخی از مواد

ماده	مدول یانگ	ماده	مدول یانگ	ماده	مدول یانگ
لاستیک (کرنش کوچک)	۰/۱-۰/۱۰	برنز	۹۶-۱۲۰	آلیاژ کبالت کروم	۲۲۰-۲۵۸
پلی اتیلن (پلی تترافلوئورو اتیلن)	۰/۵	فولاد (ASTM -A۳۶)	۲۰۰	لوله های نانو پیپتید آروماتیک	۱۹-۲۷
بتن بسیار مقاوم	۳۰	نانو لوله کربنی	+۱۰۰۰	فیبر کربن (تقویت شده)	۱۸۱
آلومینیوم	۶۹	فایبر گلاس	۱۷/۲	تیتانیوم	۱۱۰/۳

مراجع

۱. ریچارد ال. بوردن. ج. دوکلاس فیرز. آلبرت سی. رینولدز. ۱۳۹۲. ص. ۶۱۱.
۲. Maleknejad K, Hashemizadeh E, Basirat B. Computational method based on Bernstein operational matrices for nonlinear Volterra–Fredholm–Hammerstein integral equations. Commun Nonlinear Sci Numer Simul. ۲۰۱۲.
۳. Maleknejad K, Almasieh H. Optimal control of Volterra integral equations via triangular functions. Math Comput Model. ۲۰۱۱;۵۳(۹):۱۹۰۲-۱۹۰۹.
۴. Lotfi A, Dehghan M, Yousefi SA. A numerical technique for solving fractional optimal control problems. Comput Math Appl. ۲۰۱۱;۶۲(۳):۱۰۵۵-۱۰۶۷.
۵. Miller KS, Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley-Interscience; ۱۹۹۳.
۶. Hoda F Ahmed. (۲۰۱۸). A numerical technique for solving multi-dimensional fractional optimal control problems. Journal of Taibah University for Science.