



بهینه‌سازی چندجمله‌ای‌ها با استفاده از آزادسازی پایه‌های مرزی

مونا هجری‌زاده *

^{۱,۲} گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی
mona.hejrizadeh@gmail.com

چکیده. یکی از ابزارهای قدرتمند محاسباتی در جبر و هندسه جبری مبحث پایه گروبنر و پایه مرزی است که کاربرد آن در سایر علوم، و به طور خاص در حل مسائل بهینه‌سازی هر روز نمایان‌تر می‌شود. حل مسائل بهینه‌سازی بر اساس محاسبه پایه‌های مرزی، می‌تواند جهت یافتن نقاط بحرانی حقیقی از جواب‌های مختلط دستگاه معادلات چندجمله‌ای استفاده شود. روشی که در این مقاله استفاده شده ترکیبی از یک روش آزادسازی با جبر چندجمله‌ای است. مسئله بهینه‌سازی به واسطه جملات نامعادلات ماتریس خطی بر ماتریس گشتاور مربوط به مجموعه تک‌جمله‌ای‌های با درجه $t \in \mathbb{N}$ (کمتر مساوی) برای مقادیر صعودی t فرموله می‌گردد و سپس توسط روش‌های برنامه‌ریزی نیمه‌معین حل می‌شود. در ادامه الگوریتمی ارائه می‌کنیم که شامل محاسبه و آزادسازی پایه‌های مرزی و محاسبه نقاط کمینه‌کننده در مسئله کمینه سازی مطرح شده در ابتدای مقاله است.

۱. پیش‌گفتار

مدر ۱۹۶۵ برنو بوخبرگر در رساله دکترای خود مجموعه مولد خاصی برای ایده‌آل‌های حلقه چندجمله‌ای‌ها ارائه نمود که آن را به احترام استاد راهنمایش ولفانگ گروبنر، پایه گروبنر نامید. در واقع پایه گروبنر، خروجی الگوریتمی است که ورودی آن چندجمله‌ای‌های $\{F_1, F_2, \dots, F_s\} \subset K[x_1, \dots, x_n]$ هستند و یک پایه برای ایده‌آل $\langle F_1, \dots, F_s \rangle$ محسوب می‌شود. در سال‌های اخیر با توسعه علوم مهندسی، کاربرد پایه‌های گروبنر در محاسبات چشم‌گیرتر شده و دقت عمل در حل مسایل اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده است. هر چند پایه‌های گروبنر محاسبات را آسان‌تر نموده اما در برخی مسایل پاسخگوی حساسیت خروجی الگوریتم نسبت به تغییر در ضرایب چندجمله‌ای‌های ورودی نبوده، گام‌های تعیین پایه گروبنر را افزایش داده و در نتیجه حل مسایل مربوط را با مشکل مواجه کرده است. برای رفع چنین مشکلاتی پایه‌های مرزی ابداع گردیده‌اند. درواقع پایه‌های مرزی شاخه جدیدتر و ارتقاء یافته‌ی پایه‌های گروبنر است که در حل مسائل بهینه‌سازی کاربردهای زیادی دارد. در این مقاله با معرفی پایه‌های مرزی و ویژگی‌های آن، الگوریتمی برای حل یک مسئله بهینه‌سازی با استفاده از پایه‌های مرزی ارائه می‌کنیم.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 13P15; Secondary 13P25, 14Q20.

واژگان کلیدی. پایه گروبنر، پایه مرزی، برنامه‌ریزی نیمه‌معین، بهینه‌سازی.
* سخنران

۲. پایه‌های مرزی و کاربردهای آن

فرض کنید $\mathbb{T}^n = \{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ مجموعه ضربی تک جمله‌ای‌های حلقه $P = K[x_1, \dots, x_n]$ باشد. یک مجموعه متناهی $\mathbb{T}^n \subset$ ایده‌آل ترتیبی نامیده می‌شود اگر مقسوم‌علیه هر جمله از عضو باشد. به عبارت دیگر هرگاه این مجموعه نسبت به مقسوم‌علیه‌های اعضایش بسته باشد. فرض کنید یک ایده‌آل ترتیبی باشد، مجموعه $\partial = (x_1 \cup \dots \cup x_n) \setminus$ مرز نامیده می‌شود. (شکل ۱، ۳)

فرض کنید $\mathbb{T}^n = \{t_1, \dots, t_\mu\}$ یک ایده‌آل ترتیبی و $\partial = \{b_1, \dots, b_\nu\}$ مرز آن باشد. مجموعه چندجمله‌ای‌های $I \subset \{g_1, \dots, g_\nu\}$ به صورت:

$$g_j = b_j - \sum_{i=0}^{\mu} c_{ij} t_i \quad c_{ij} \in K, \quad t_i \in$$

یک - پیش پایه مرزی I نامیده می‌شود. - پیش پایه مرزی I یک - پایه مرزی نامیده می‌شود اگر رده مانده‌های اعضای یک پایه $K -$ فضا برداری $\frac{P}{I}$ باشد. [۹]

ایده‌آل ترتیبی $\mathbb{T}^2 = \{1, x, y, xy\}$ در $\mathbb{T}^2$ با مجموعه مرز $\partial = \{x^2, x^2y, xy^2, y^2\}$ را در نظر بگیرید. (شکل ۲، ۳) مجموعه چندجمله‌ای‌های $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ بطوریکه:

$$g_1 = x^2 - x, \quad g_2 = x^2y - xy, \quad g_3 = xy^2 - xy, \quad g_4 = y^2 - y$$

یک پایه مرزی I است.

(وجود و یکتایی پایه‌های مرزی) فرض کنید $\mathbb{T}^n \subset$ یک ایده‌آل ترتیبی و $I \subset P$ یک ایده‌آل صفربعدی باشد.

(الف) ایده‌آل ترتیبی را در نظر بگیرید، ایده‌آل چندجمله‌ای صفربعدی I ، مرزی ندارد، مگر اینکه $\# \dim_K(\frac{P}{I})$.

(ب) اگر ایده‌آل صفربعدی $I \subset P$ دارای پایه مرزی G باشد، آنگاه G ایده‌آل I را تولید می‌کند.

(پ) اگر ایده‌آل صفربعدی $I \subset P$ دارای پایه مرزی G باشد، آنگاه G بطور یکتا معین می‌شود. [۲]

فرض کنید $\partial = \{t_1, \dots, t_\nu\}$ و $\bar{i} = \overline{i-1} \cup \partial_{i-1}$ برای $i \geq 1$. برای هر جمله $t \in \mathbb{T}^n$ ، وجود دارد عدد یکتای $i = (t) \geq 0$ به طوری که $t \in \bar{i} \setminus \bar{i-1}$. این عدد - شاخص t نامیده می‌شود. (الگوریتم تقسیم مرزی) چندجمله‌ای f را در نظر بگیرید، این الگوریتم دارای گام‌های زیر Steps است:

- گام ۱: فرض کنید $f_1 = \dots = f_\nu = 0$ ، $c_1 = \dots = c_\mu = 0$ ، $h = f$. اگر $h = 0$ برگرد به $(f_1, \dots, f_\nu, c_1, \dots, c_\mu)$ و متوقف شو.
- گام ۲: اگر $(h) = 0$ ، آنگاه $c_1, \dots, c_\mu \in K$ یافت می‌شوند به طوری که $h = c_1 t_1 + \dots + c_\mu t_\mu$ برگرد به $(f_1, \dots, f_\nu, c_1, \dots, c_\mu)$ و متوقف شو.
- گام ۳: اگر $(h) > 0$ آنگاه $h = a_1 h_1 + \dots + a_s h_s$ با $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{T}^n$ به طوری که $(h_1) = 0$ را در نظر بگیر. کوچکترین شاخص $i \in \{1, \dots, \nu\}$ را طوری تعیین کن که $h_1 = t' b_i$ به صورت $h_1 = t' b_i$ که جمله t' از درجه ۱ - است، تجزیه شود. $a_1 t' g_i$ را از h کم کن، $a_1 t'$ را به f_i اضافه کن و با گام ۱ ادامه بده.

این الگوریتمی است که خروجی آن، چندتایی مرتب زیر است

$$\begin{aligned} & (f_1, \dots, f_\nu, c_1, \dots, c_\mu) \in P^\nu \times K^\mu \\ \text{such that: } & f = f_1 g_1 + \dots + f_\nu g_\nu + c_1 t_1 + \dots + c_\mu t_\mu; \\ \text{and } & \deg(f_i) \leq (f) - 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, \nu\}, \quad f_i g_i \neq 0. \end{aligned}$$

رده‌های هم‌ارزی کاسته‌ی اعضای K ، فضای برداری $\frac{P}{I}$ را تولید می‌کند. حال که با تعریف و الگوریتم محاسبه پایه‌های مرزی آشنا شدیم، به تشریح برخی مزایای استفاده از پایه‌های مرزی خواهیم پرداخت:

(۱) پایه‌های مرزی از نظر تعداد پایا هستند. اگر ضرایب برخی چندجمله‌ای‌های مولد I مختصر تغییری کند، پایه مرزی I بطور پیوسته تغییر می‌کند.

(۲) پایه‌های مرزی تقارن را حفظ می‌کنند. ایده‌آل‌های ترتیبی که یک پایه مرزی برای ایده‌آل I می‌سازد بیشتر از ایده‌آل‌هایی به شکل $\sigma = \mathbb{T}^n \setminus LT_\sigma(I)$ است. به همان نسبت، پایه‌های مرزی دارای تقارن یکسان به عنوان دستگاه مولد اولیه وجود دارد.

(۳) پایه‌های مرزی یک فضای مدولی صریح حاصل می‌کند. ضرایب یک پیش پایه مرزی بواسطه فضای آفین پارامتری هستند. طرح پایه مرزی در این فضای آفین با معادلات صریح تعریف می‌شود.

۱.۲. کاربردها. حال، با توجه به ویژگی‌هایی که در مورد پایه‌های مرزی گفتیم، می‌توانیم برخی از کاربردهای پایه‌های مرزی را در زیر شرح دهیم.

یکی از کاربردهای پایه‌های مرزی، در برنامه‌ریزی برای حفاری میدان‌های نفتی است. بدین سان که با توجه به نوع ساختار هر میدان نفتی، به عنوان مثال میدان‌های نفتی با دو دیواره و پیاده‌سازی و حل یک مدل چندجمله‌ای برای آن توسط پایه‌های مرزی می‌توان بهترین مسیر را برای رسیدن به منبع نفت انتخاب نمود.

کاربرد دیگری که می‌توان از آن نام برد، استفاده از پایه‌های مرزی در محاسبه رادیکال حقیقی ایده‌آل‌ها است. با توجه به ساختار الگوریتمی پایه‌های مرزی، روش جدیدی برای محاسبه رادیکال یک ایده‌آل می‌توان ارائه نمود. [۳] آنچه در این مقاله به عنوان کاربرد پایه‌های مرزی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد، استفاده از پایه‌های مرزی در حل مسائل بهینه‌سازی است. مسائل بهینه‌سازی می‌تواند به عنوان حل معادلات چندجمله‌ای وابسته به مقدار بحرانی چندجمله‌ای f بر یک مجموعه نیمه‌جبری بسته، صورت‌بندی شوند و جهت یافتن نقاط بحرانی حقیقی از جواب‌های مختلط دستگاه چندجمله‌ای (صفر بعدی) برای حل مسائل چندجمله‌ای از روش محاسبه پایه‌های مرزی استفاده می‌کنیم. محاسبه‌ی اینفیم سراسری تابع چندجمله‌ای f بر مجموعه‌ای نیمه‌جبری، مسئله‌ای دشوار اما مهم و دارای کاربردهای زیادی است. مسئله کمینه‌سازی که ما مورد بررسی قرار خواهیم داد به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \text{find: } & \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{such that: } & g_1^0 = \dots = g_{n_1}^0 = 0, \\ \text{and } & g_1^+(x) \geq 0, \dots, g_{n_r}^+(x) \geq 0. \end{aligned}$$

ما الگوریتمی برای محاسبه اینفیم این تابع چندجمله‌ای و نقاط مینیمم‌کننده آن هنگامی که ایده‌آل مینیمم‌کننده صفر بعدی است ارائه می‌کنیم. برای رسیدن به این مهم در بخش اول الگوریتم خود فرم خطی بهینه را با استفاده از آزادسازی پایه‌های مرزی محاسبه می‌کنیم، پس از آن زمان رسیدن به مینیمم را بررسی می‌کنیم و در نهایت نقاط مینیمم‌کننده را محاسبه می‌کنیم. این الگوریتم به شرح زیر می‌باشد:

ورودی: تابع چندجمله‌ای حقیقی f و مجموعه قیود $g \subset \mathbb{R}[x]$ با مجموعه نقاط مینیمم‌کننده ناتهی و متناهی $V_{\min}$.

- خروجی: مینیم $f^* = f_{G_t, B_t}^*$ ، نقاط مینیم کننده $V_{\min} = V$ و ایده آل مینیم کننده $I_{\min} = (K)$ و B' به طوری که K یک پایه مرزی برای B'
- گام ۱: در نظر بگیر $(\lceil \frac{\deg(f)}{2} \rceil, d^{\circ}, d^+)$ که $t = \max(\lceil \frac{\deg(f)}{2} \rceil, d^{\circ}, d^+)$ و $d^+ = \max_{g^{\circ} \in g^{\circ}} (\lceil \frac{\deg(g^{\circ})}{2} \rceil)$
 - گام ۲: پایه مرزی مدرج f_{2t} از g° برای B از درجه $2t$ را محاسبه کن. فرض کن B_t مجموعه ای از تک جمله ای های عضو B از درجه $t \leq$.
 - گام ۳: فرض کن G_t مجموعه ای از قیود باشد به طوری که $G_t^{\circ} = \{m - \pi_{B_t, F_t}(m), m \in G_t\}$. تعریف کن $[f_{G_t, B_t}^*, \Lambda^*]$ فرم خطی بهینه (f, B_t, G_t) .
 - گام ۴: تعریف کن $[c, B', K]$ تجزیه ی (Λ^*, B_t) که c عدم موفقیت است هرگاه $B' = \emptyset, K = \emptyset$ یا موفقیت است هرگاه B' پایه و K مجموعه ای از روابط باشد.
 - گام ۵: اگر c موفقیت باشد آنگاه V نقاط مینیم کننده (B', K) است در غیر این صورت به گام ۲ برو و الگوریتم را برای $t := t + 1$ انجام بده. [۱]

سپاس گذاری

با سپاس فراوان از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر حسن حقیقی

مراجع

1. Abril Bucero M. and Mourrain B. (2016), *Border basis relaxation for polynomial optimization*, *J. Symbolic Computation*. **74**, 378-399.
2. Kriegl M. (2015), *Generalizations and Applications of Border Bases*, Passau, Germany, University of Passau.
3. Lasserre J-B. , Laurent M. and Mourrain B. , Rostalski P. and Trébuchet P. (2013), Moment matrices, border bases and real radical computation, *J. Symbolic Computation*, **51**, 63-85.