



## محاسبه بعدمتریک گراف با الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی

هاشم عزتی<sup>1</sup> \* و محمود امین‌طوسی<sup>2</sup>

<sup>1</sup>گروه علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
h.ezzati@aut.ac.ir

<sup>2</sup>گروه علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری  
m.amintoosi@hsu.ac.ir

چکیده. بعد متریک گراف از دسته مسائل ان پی-سخت در نظریه محضی گراف می باشد که دارای کاربردهایی از جمله هدایت زیردریایی‌ها، تعیین موقعیت یک مزاحم در یک شبکه و کاربردهای متعدد دیگر می‌باشد. محاسبه بعدمتریک ابر-مکعب‌ها از مسائل باز مطرح شده می‌باشد که تاکنون راه‌حلی برای محاسبه بعدمتریک آن‌ها گزارش نشده است. در این مقاله از الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی برای حل این مسئله استفاده شده است. نتایج آزمایشات بر روی تعدادی نمونه از ابرمکعب‌ها، کارایی شیوهی پیشنهادی را نشان داده است.

### ۱. مقدمه

بعدمتریک<sup>۱</sup> گراف، اندازه کوچکترین زیرمجموعه از رئوس گراف می‌باشد که به ازای آن بتوان تمایزی بین رئوس گراف قائل شد. این مسئله اولین بار توسط هرری و میلتر<sup>۲</sup> در سال ۱۹۷۶ معرفی شد [۱]. این مسئله از دسته مسائل ان پی-سخت<sup>۳</sup> می باشد [۲] که راه حل دقیقی برای حل آن در زمان معقول موجود نیست. برای حل این دسته از مسائل از روش‌های فراابتکاری مانند الگوریتم جستجوی ممنوعه، الگوریتم ژنتیک و شبیه‌سازی تبریدی<sup>۴</sup> استفاده می‌شود. در [۳] از الگوریتم ژنتیک برای حل مسئله استفاده شده است. همچنین در مراجع [۴، ۵، ۶] بعد متریک دسته خاصی از گراف‌ها محاسبه شده و در قالب قضایایی مطرح و اثبات شده‌اند. بعدمتریک گراف دارای کاربردهای فراوانی می باشد که از جمله آنها می توان به هدایت ناوبری ربات، هدایت زیردریایی‌ها و تعیین موقعیت یک مزاحم در یک شبکه به عنوان گراف اشاره کرد [۶]. در این مقاله از روش شبیه‌سازی تبریدی برای حل مسئله استفاده شده و نتایج با الگوریتم ژنتیک مقایسه شده است. نمونه‌های مورد آزمایش، ابر-مکعب‌ها<sup>۵</sup> می‌باشند که محاسبه بعد متریک آنها از مسائل باز حل نشده می‌باشد [۴].

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 90C27; Secondary 97R20, 97K30

واژگان کلیدی. بعدمتریک، الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی، بهینه‌سازی، الگوریتم‌های فراابتکاری.  
\* سخنران

<sup>1</sup>Metric dimension

<sup>2</sup>F.Harary and R.A Melter

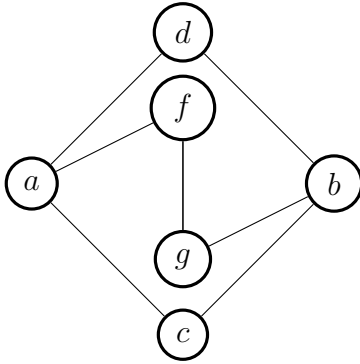
<sup>3</sup>NP-hard

<sup>4</sup>Simulated annealing

<sup>5</sup>Hypercubes

در بخش ۲ با ذکر چند مثال، مسئله بعد متریک گراف بیان شده است. در بخش ۳ مرور مختصری بر الگوریتم شبیه‌سازی تیریدی شده و روش حل مسئله به کمک الگوریتم شبیه‌سازی تیریدی بیان شده است و در نهایت در بخش ۴ نتایج آزمایشات نشان داده شده است.

## ۲. تعریف مسئله و فرمول‌بندی آن



شکل ۱. گراف ساده، همبند و بدون جهت  $G_1$

فرض کنید  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  یک مجموعه مرتب از رئوس گراف همبند، ساده و بدون جهت  $G(V, E)$  باشد. نمایش متریک رأس  $v$  نسبت به مجموعه  $S$  بردار  $k$  تایی  $r(v|S) = (d(v, v_1), d(v, v_2), \dots, d(v, v_k))$  می‌باشد که در آن  $d(v, v_i)$  کوتاهترین فاصله بین دو رأس  $v$  و  $v_i$  می‌باشد. همچنین  $i$  عددی بین ۱ تا  $k$  می‌باشد.  $S$  را مجموعه تفکیک‌کننده رئوس گراف  $G$  می‌نامیم هرگاه برای هر دو رأس متمایز  $u$  و  $v$  متعلق به  $V(G)$  داشته باشیم  $r(u|S) \neq r(v|S)$ . تعداد اعضای کوچکترین مجموعه تفکیک‌کننده گراف  $G$  را بعد متریک گراف نامیده و با  $\dim(G)$  نشان داده می‌شود [۷]. همچنین می‌توان مسئله را به صورت یک مسئله برنامه‌ریزی اعداد صحیح فرموله کرد [۳]. فرض کنید  $D = [d_{uv}]_{n \times n}$  ماتریس

کوتاهترین مسیر بین تمام رئوس در گراف  $G$  باشد واضح است که  $S \subseteq V$  می‌باشد. با فرض اینکه  $y_j$  یک باشد، اگر  $j \in S$  و در غیر اینصورت، صفر باشد، بعد متریک گراف به صورت زیر در قالب یک مسئله برنامه‌ریزی اعداد صحیح فرموله می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n y_j \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n |d_{uj} - d_{vj}| \cdot y_j \geq 1 \quad \text{for all } 1 \leq u < v \leq n \\ y_j \in \{0, 1\} \quad \text{for all } 1 \leq j \leq n \end{aligned} \quad (۱.۲)$$

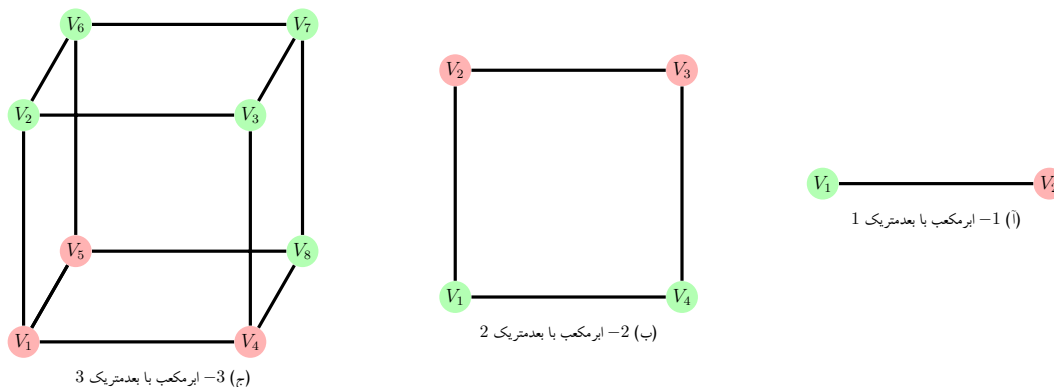
مثال ۱.۲. در شکل ۱ یک گراف همبند، ساده و بدون جهت داده شده است. که آن را  $G_1$  می‌نامیم. مجموعه  $S_3 = \{a, b, c\}$  که در آن بردارهای

$$r(a|S_3) = (0, 2, 1), r(b|S_3) = (2, 0, 1), r(c|S_3) = (1, 1, 0), r(d|S_3) = (1, 1, 2), \\ r(f|S_3) = (1, 2, 2), r(g|S_3) = (2, 1, 2)$$

متمایز می‌باشند، یک مجموعه تفکیک‌کننده برای  $G_1$  می‌باشد اما کوچکترین مجموعه نیست. زیرا مجموعه  $S_2 = \{c, f\}$  با بردارهای متمایز زیر یک مجموعه تفکیک‌کننده با اندازه ای کوچکتر از اندازه  $S_3$  برای  $G_1$  می‌باشد:

$$r(a|S_2) = (1, 1), r(b|S_2) = (1, 2), r(c|S_2) = (0, 2), r(d|S_2) = (2, 2), \\ r(f|S_2) = (2, 1), r(g|S_2) = (2, 0)$$

دقت شود که مجموعه  $S'_3 = \{a, f, g\}$  یک مجموعه تفکیک‌کننده برای  $G_1$  نمی‌باشد، چون دو بردار  $r(c|S'_3)$  و  $r(d|S'_3)$  متمایز نمی‌باشند (می‌توان به راحتی آن را محاسبه کرد). همچنین به راحتی می‌توان مشاهده کرد که هیچ مجموعه تک‌عضوی در شرایط مسئله صدق نمی‌کند و لذا  $\dim(G_1) = 2$  می‌باشد.



شکل ۲. سه ابرمکعب و رئوس مرتبط با بعد متریک آنها. رئوسی که دارای رنگ قرمز می‌باشند، تشکیل دهنده کوچکترین مجموعه تفکیک کننده (بعد متریک) هر گراف می‌باشند.

در شکل ۲ تعدادی ابر-مکعب و بعد متریک آنها نشان داده شده است. از گراف‌های ابر-مکعب در آزمایشات استفاده شده است که با  $Q_n$  نمایش داده شده‌اند. تعریف این گروه از گرافها در ادامه آمده است. گراف ابرمکعب  $Q_n$  گراف‌ایست که مجموعه رئوس آن مشتمل بر  $2^n$  بردار دودویی  $n$ -تایی (بردارهایی با مختصات صفر و یک) می‌باشد که دو رأس در صورتی مجاورند که فقط در یک مؤلفه با هم متفاوت باشند. ۹ نمونه گراف ابر-مکعب با ابعاد مختلف تولید و در آزمایشات بکار گرفته شده‌اند.

### ۳. الگوریتم شبیه سازی تبریدی

الگوریتم شبیه سازی تبریدی با یک جواب اولیه شروع میشود در همسایگی های این جواب یک نقطه انتخاب میشود اگر باعث بهبود تابع هدف می شد به عنوان نقطه جدید پذیرفته می‌شود، در غیر این صورت با احتمال  $e^{(-\Delta E)/T}$  پذیرفته میشود.  $\Delta E$  اختلاف تابع هدف و  $T$  پارامتر کنترل است پس از رسیدن به حالت تعادل  $T$  را کاهش میدهم این روند تارسیدن به شرط خاتمه ادامه میابد.

۱.۳. حل بعد متریک گراف با استفاده از شبیه‌سازی تبریدی. بخش اصلی الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی نحوه نمایش یک جواب ممکن و تعریف همسایگی یک جواب می‌باشد در شیوه پیشنهادی آرایه‌ای باینری از صفر و یک‌ها به اندازه تعداد رئوس در نظر گرفته می‌شود که نمایانگر یک مجموعه (راه حل) می‌باشد (یک‌ها نشان دهنده تعلق رأس به مجموعه می‌باشند). همسایگی جدید با تعویض دو عنصر از آرایه صورت می‌پذیرد اما با این کار مجموعه‌هایی با تعداد اعضایی بیشتر یا کمتر از مجموعه فعلی مورد بررسی قرار نخواهند گرفت برای غلبه بر این مشکل با احتمال 0.5 رأسی از مجموعه جواب با رأسی از باقی رئوس تعویض و با احتمال 0.5 یک رأس به مجموعه فعلی اضافه یا کم می‌شود. با انجام این عمل احتمال جستجو در کل فضای جواب وجود خواهد داشت.

### ۴. نتایج پیاده‌سازی

نتایج آزمایشات حاصل از فرم استاندارد شبیه‌سازی تبریدی در نرم افزار متلب نسخه R2018a با شروط پایانی حداکثر تکرار ۱۰۰۰ یا عدم بهبود جواب بهینه بعد از ۱۰۰ تکرار می‌باشند. آزمایشات روی ابر-مکعب‌ها انجام شدند. میانگین اجرای ۲۰ تکرار برای هر گراف گزارش شده است. میانگین زمان (ثانیه)، میانگین تکرار (میانگین تکرار الگوریتم شبیه سازی برای رسیدن به جواب) و بعدمتریک (بهترین جواب) حاصل از این بیست اجرا به عنوان جواب بهینه الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی در جدول ۳ نشان داده شده‌اند. به منظور مقایسه از نتایج الگوریتم ژنتیک مذکور در مرجع [۳] استفاده شده است. ستون‌های GA و SA در جدول ۳ نتایج روش الگوریتم ژنتیک (به عنوان روش مرجع) و روش شبیه‌سازی

| ردیف | گراف  | تعداد رئوس | تعداد یال‌ها | GA | SA | میانگین زمان (ثانیه) | میانگین تکرار |
|------|-------|------------|--------------|----|----|----------------------|---------------|
| 1    | $Q_1$ | 2          | 1            | 1  | 1  | 0.0607               | 102           |
| 2    | $Q_2$ | 4          | 4            | 2  | 2  | 0.0461               | 105           |
| 3    | $Q_3$ | 8          | 12           | 3  | 3  | 0.0587               | 117           |
| 4    | $Q_4$ | 16         | 32           | 4  | 4  | 0.0574               | 130           |
| 5    | $Q_5$ | 32         | 80           | 4  | 4  | 0.1119               | 206           |
| 6    | $Q_6$ | 64         | 192          | 5  | 5  | 0.3083               | 263           |
| 7    | $Q_7$ | 128        | 448          | 6  | 6  | 1.7312               | 441           |
| 8    | $Q_8$ | 256        | 1024         | 6  | 6  | 13.1489              | 799           |
| 9    | $Q_9$ | 512        | 2304         | 7  | 20 | 92.9943              | 963           |

شکل ۳. نتایج حاصل از شبیه‌سازی تیریدی روی ابر-مکعب‌ها.

تیریدی را نشان می‌دهند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود الگوریتم پیشنهادی برای ابر-مکعب‌های  $Q_1$  تا  $Q_8$  به همان جواب الگوریتم ژنتیک رسیده است. اما برای گراف‌های  $Q_9$  نتیجه روش پیشنهادی به خوبی الگوریتم ژنتیک نبوده است. به صورت خلاصه، نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که روش شبیه‌سازی تیریدی در حل مسئله بعد متریک گراف، می‌تواند نتایج قابل رقابتی با الگوریتم ژنتیک تولید کند.

#### مراجع

- [1] F. Harary and R. Melter, "On the metric dimension of a graph," *Ars Combinatoria*, 1976.
- [2] S. Khuller, B. Raghavachari, and A. Rosenfeld, "Landmarks in graphs," *Discrete Applied Mathematics*, vol.70, no.3, pp.217 – 229, 1996.
- [3] J. Kratica, V. Kovačević-Vujčić, and M. Čangalović, "Computing the metric dimension of graphs by genetic algorithms," *Comput. Optim. Appl.*, vol.44, pp.343–361, Nov. 2009.
- [4] C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, C. Seara, J. Cáceres, and M. L. Puertas, "On the metric dimension of some families of graphs," *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, vol.22, pp.129 – 133, 2005. 7th International Colloquium on Graph Theory.
- [5] M. Fehr, S. Gosselin, and O. R. Oellermann, "The metric dimension of cayley digraphs," *Discrete Mathematics*, vol.306, no.1, pp.31 – 41, 2006.
- [6] L. Beaudou, F. Foucaud, P. Dankelmann, M. Henning, A. Mary, and A. Parreau, "Bounding the order of a graph using its diameter and metric dimension: A study through tree decompositions and vc dimension," *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol.32, 10 2016.
- [7] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellermann, "Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph," *Discrete Applied Mathematics*, vol.105, no.1, pp.99 – 113, 2000.