



بررسی نا کارآمدی الگوریتم کارگر در برش کمینه گرافهای وزن دار

فاطمه سادات حسینی^۱ * و محمود امین طوسی^۲

^۱ دبیر ریاضی، آموزش و پرورش خراسان رضوی
af_1367@yahoo.com

^۲ گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری
m.amintoosi@hsu.ac.ir

چکیده. در مسئله برش مینیمم هدف مینیمم کردن ظرفیت یالهای برش است. از روشهای تقریبی حل این مسائل میتوان به الگوریتم کارگر اشاره کرد، که از تلفیق لبه ها به صورت تصادفی استفاده می کند و معمولا برای گرافهای بدون وزن استفاده می شود. زمانی که این الگوریتم را برای گراف های وزن دار استفاده می کنیم، عملکرد چندان خوبی ندارد. قبلا روش کارگر برای گراف های وزن دار با روشهای تقریبی جستجوی ممنوعه و شبیه سازی تبریدی مقایسه شده و ضعف الگوریتم کارگر برای گراف های وزن دار از نظر عملی اثبات شده است. در این مقاله به بررسی علت ضعف از نظر تئوری می پردازیم.

۱. پیشگفتار

در نظریه گراف منظور از برش، تقسیم رئوس گراف به دو زیرمجموعه ناتهی جدا از هم s و $(v - s)$ می باشد. یالهای ”برش“ از یک برش به یالهایی گویند که در مجموعه برش آن باشند. در مسئله برش کمینه ی گراف هدف یافتن این دو زیر مجموعه به نحوی است که ظرفیت یالهای برش مینیمم شود. مدل ریاضی برش مینیمم به صورت زیر است:

$$\min \sum_{i \in S, j \in (V-S)} C_{ij} \quad (1.1)$$

به نحوی که $S, (V - S) \neq \emptyset$ یکی از روشهای مشهور برای پیدا کردن برش کمینه روش استور و واگنر است، در این روش در هر مرحله یال با ظرفیت بالاتر تلفیق می شود تا زمانی که فقط دو راس باقی بماند [۳]. در روش کارگر یالها برای تلفیق به صورت تصادفی انتخاب می شوند. و با احتمال $\binom{n}{2}^{-1}$ برش مینیمم را برمیگرداند [۴]. در [۵] اثبات شده است که، اگر الگوریتم کارگر را برای گراف های بدون وزن به کار ببریم، آنگاه خروجی

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. برش کمینه، الگوریتم کارگر، گراف وزن دار،

* سخنران

الگوریتم ۱ الگوریتم کارگر [۴]

ورودی: گراف بدون وزن G

خروجی: برش کمینه و مجموعه رئوس برش

۱: قراردید $G_0 = G$ و $i = 0$ ۲: تا زمانی که G_i بیش از دو راس دارد تکرار کنید.۳: یک یال تصادفی e_i از گراف G_i انتخاب کنید و قرار دهید $i = i + 1$ ، $G_{i+1} = G_i / e_i$ ۴: فرض کنید $(S, V/S)$ برش مطابق با $G_{|V|-2}$ در گراف اصلی باشد $(S, V/S)$ را برگردانید.

الگوریتم با احتمال $\frac{2}{n(n-1)}$ برش کمینه است و با $n(n-1)$ بار تکرار الگوریتم، احتمال شکست حداکثر ۰.۱۴ است.

قبلا در مقالات [۱]، [۲] از نظر عملی نشان داده شده که برای گراف های وزن دار این الگوریتم مناسب نیست و نیز در مقایسه با روشهای پیشنهادی این دو مقاله، از نظر ز نظر جواب بهینه، میانگین زمان اجرا و فرکانس همگرایی کارایی کمتری داشته است، و با افزایش تعداد رئوس روشهای پیشنهادی این دو مقاله از نظر میانگین زمان اجرا و فرکانس همگرایی تغییر چندانی نداشتند، ولی الگوریتم کارگر افزایش چشمگیر در زمان اجرا و نیز کاهش شدید فرکانس همگرایی همراه بوده است. در این مقاله قصد داریم دلایل ضعف این الگوریتم برای گراف های وزن دار را از نظر تئوری اثبات کنیم.

۲. بررسی الگوریتم کارگر در گراف های وزن دار

در این بخش به صورت تئوری، نشان می دهیم که اگر الگوریتم کارگر را برای گراف های وزن دار به کار ببریم، احتمال رسیدن به برش کمینه بسیار پایین است که با بالا رفتن تعداد رئوس این مقدار کمتر خواهد و برای رسیدن به همگرایی و اگر بخواهیم به حداکثر خطای حداکثر ۰.۱۴ که در [۵] به آن اشاره شده برسیم، تعداد تکرار های زیادی لازم است که این کار بسیار زمان بر است. ثابت می کنیم، اگر این الگوریتم را برای گرافهای وزن دار جهتدار به کار ببریم، آنگاه خروجی با احتمال $\frac{2}{n!(n-1)}$ برش کمینه است. و با $n!(n-1)$ بار تکرار الگوریتم، احتمال شکست حداکثر ۰.۱۴ است. برای گراف های وزن دار بدون جهت خروجی با احتمال $\frac{2^{n-1}}{n!(n-1)}$ برش کمینه است. و با $\frac{n!(n-1)}{2^{n-1}}$ بار تکرار الگوریتم، احتمال شکست حداکثر ۰.۱۴ است. برای اثبات این قضایا ابتدا باید نشان دهیم در هر یک از این حالات احتمال اینکه یال تصادفی انتخاب شده در برش کمینه و بنابراین ابتدا به اثبات لم های زیر می پردازیم.

لم ۱.۲. اگر $[P, \bar{P}]$ برش مینیمم باشند، آنگاه P و $\bar{P}$ مجموعه های همبند هستند.

برهان. (فرض خلف) اگر P همبند نباشد، آنگاه حداقل دو مولفه ی همبند P_1 و P_2 دارد. $[P_1, \bar{P} \cup P_2]$ برشی است که ظرفیت آن کمتر از برش $[P, \bar{P}]$ است و این با فرض تناقض دارد. $\square$

لم ۲.۲. اگر تعداد کل یالهای گراف G را m ، تعداد رئوس G را n و تعداد کل یال های برش را m_{cut} نشان دهیم، آنگاه $\{n-2\} + m_{cut} \geq m$

برهان. تعداد رئوس مجموعه های P و $\bar{P}$ را با n_P و $n_{\bar{P}}$ و تعداد یالهای آنها را با m_P و $m_{\bar{P}}$ نشان می دهیم. بنا به لم ۱.۲، P و $\bar{P}$ مجموعه های همبند هستند. بنابراین

$$m_P \geq n_P - 1, \quad m_{\bar{P}} \geq n_{\bar{P}} - 1 \\ \Rightarrow m = m_{cut} + m_P + m_{\bar{P}} \geq m_{cut} + n_P + n_{\bar{P}} - 2 \Rightarrow m \geq m_{cut} + n - 2$$

□

قضیه ۳.۲. در یک گراف وزن دار جهت دار، اگر یک یال را تصادفی انتخاب کنیم، آنگاه با احتمال بزرگتر مساوی $\frac{n-2}{n(n-1)}$ این یال در برش کمینه نیست.

برهان. احتمال نبودن هریال در برش کمینه به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P(step) = 1 - \frac{m_{cut}}{m} = \frac{m - m_{cut}}{m} \xRightarrow{\text{بنا به لم ۲.۲}} P(step) \geq \frac{n-2}{m}$$

□

گراف حداکثر $n(n-1)$ یال دارد. بنابراین $P(step) \geq \frac{n-2}{n(n-1)}$

نتیجه ۴.۲. در یک گراف وزن دار بدون جهت اگر یک یال را تصادفی انتخاب کنیم، آنگاه با احتمال بزرگتر مساوی $\frac{2(n-2)}{n(n-1)}$ این یال در برش کمینه نیست.

□

برهان. تعداد یال های گراف حداکثر $\frac{n(n-1)}{2}$ است. بنابراین $P(step) \geq \frac{n-2}{m} \geq \frac{2(n-2)}{n(n-1)}$

قضیه ۵.۲. خروجی این روش در گراف وزن دار جهت دار با احتمال $\frac{2}{n!(n-1)}$ برش کمینه است.

برهان. بنا به قضیه ۳.۲ در مرحله اول احتمال اینکه یال تصادفی در برش کمینه نباشد، بزرگتر مساوی $\frac{(n-2)}{n(n-1)}$ است. فرض کنید رویداد η_i اتفاق می افتد اگر e_i یال انتخاب شده از G_i یالی از برش کمینه نباشد. و فرض کنید n_i تعداد رئوس گراف G_i باشد. اگر تمام رویدادهای $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-3}$ رخ دهند، تمام یالهای انتخابی بیرون از برش کمینه اند و خروجی الگوریتم برش کمینه است. در مرحله i ام احتمال اینکه تمام لبه ها ی انتخاب شده برای انقباض خارج از برش کمینه باشند برابر است با:

$$P(\eta_i | \eta_0 \cap \eta_1 \cap \dots \cap \eta_{i-1}) \geq \frac{(n_i - 2)}{n_i(n_i - 1)} = \frac{(n - i - 2)}{n - i(n - i - 1)}$$

از طرفی داریم:

$$P\left(\bigcap_{i=0}^{n-3} \eta_i\right) = P(\eta_0) * P(\eta_1 | \eta_0) * P(\eta_2 | \eta_0 \cap \eta_1) * \dots * P(\eta_{n-3} | \eta_0 \cap \eta_1 \cap \dots \cap \eta_{n-4})$$

و بنابراین احتمال اینکه خروجی الگوریتم برش کمینه باشد برابر است با:

$$P\left(\bigcap_{i=0}^{n-3} \eta_i\right) \geq \prod_{i=0}^{n-3} \frac{(n - i - 2)}{n - i(n - i - 1)} = \frac{2}{n!(n-1)}$$

□

بنابراین احتمال همگرایی الگوریتم حداقل برابر است با: $\frac{2}{n!(n-1)}$.

نتیجه ۶.۲. در یک گراف وزن دار بدون جهت خروجی این روش با احتمال $\frac{2^{n-1}}{n!(n-1)}$ برش کمینه است.

برهان. به طور مشابه بنا به نتیجه ۴.۲ اثبات می شود. □
 قضیه ۷.۲. برای گراف وزن دار جهت دار اگر الگوریتم $(n-1)n!$ بار تکرار شود، احتمال شکست حداکثر ۰.۱۴ است. بنا به قضیه ۵.۲ در هر بار اجرای الگوریتم احتمال شکست حداکثر $1 - \frac{2}{n!(n-1)}$ است. ، و می دانیم اگر $0 \leq x \leq 1$ آنگاه $x \leq e^{-2}$. بنابراین

$$1 - \frac{2}{n!(n-1)} \leq e^{-\frac{2}{n!(n-1)}} \rightarrow \left(1 - \frac{2}{n!(n-1)}\right)^{(n!(n-1))} \leq e^{-2} = 0.14$$

بنابراین اگر الگوریتم را $(n-1)n!$ بار تکرار کنیم، آنگاه احتمال شکست حداکثر ۰.۱۴ است.

نتیجه ۸.۲. در یک گراف وزن دار بدون جهت خروجی اگر الگوریتم $\frac{n!(n-1)}{2}$ بار تکرار شود، آنگاه احتمال شکست حداکثر ۰.۱۴ است.

برهان. به طور مشابه بنا به نتیجه ۶.۲ اثبات می شود. □

۳. دست‌آوردهای پژوهش

در این مقاله با بیان دلایل ضعف الگوریتم کارگر، برای گراف های وزن دار به صورت تئوری نشان دادیم که اگر این الگوریتم را برای گراف های وزن دار جهتدار به کار ببریم، آنگاه خروجی با احتمال $\frac{2}{n!(n-1)}$ برش کمینه است. و با $(n-1)n!$ بار تکرار الگوریتم، احتمال شکست حداکثر ۰.۱۴ است. برای گراف های وزن دار بدون جهت خروجی با احتمال $\frac{2^{n-1}}{n!(n-1)}$ برش کمینه است. و با $\frac{n!(n-1)}{2}$ بار تکرار الگوریتم، احتمال شکست حداکثر ۰.۱۴ است. یعنی برای گراف های وزن دار احتمال رسیدن به برش کمینه بسیار پایین است که با بالا رفتن تعداد رئوس این مقدار کمتر خواهد و برای رسیدن به همگرایی و اگر بخواهیم به حداکثر خطای حداکثر ۰.۱۴ که در [۵] به آن اشاره شده برسیم، تعداد تکرار های زیادی لازم است که این کار بسیار زمان بر است. همانگونه که قبلا در [۱]، [۲] به صورت عملی اثبات شده بود که در گراف های وزن دار روشهای فراابتکاری جستجوی ممنوعه و شبیه سازی تبریدی عملکرد بهتری از روش کارگر دارند.

مراجع

۱. ف.س. حسینی و م. امین طوسی، برش کمینه گراف با جستجوی ممنوعه، هفتمین کنفرانس بین المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات، ۱۳۹۱، صفحات ۴۱۱-۴۱۲.
۲. ف.س. حسینی و م. امین طوسی، برش کمینه گراف با شبیه سازی تبریدی، هفتمین کنفرانس بین المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات، ۱۳۹۱، صفحات ۳۷۴-۳۷۵.
3. M.Stoer and F. Wagner., *A simple min-cut algorithm*. Journal of ACM, 44(4):585-591, July 1997.
4. D.Karger, David , *Global Min-cuts in RNC and Other Ramifications of a Simple Mincut Algorithm*. Proc. 4th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1993.
5. S. Har-Peled, *Minimum cut in a graph*, University Lecture (Randomized Algorithms). 2002