



## حل مسئله کنترل بهینه غیر خطی با استفاده از روش تکرار تغییراتی

فاطمه منصوری<sup>۱\*</sup>، زهرا میرزاخان زاده<sup>۲</sup>، و محمدعلی پرتانیان<sup>۳</sup>

<sup>۱,۲</sup> گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری  
fateme.mansoori1371@gmail.com  
zahra.khanzadeh90@yahoo.com  
m.partanian@hsu.ac.ir

چکیده. نظریه کنترل بهینه یکی از موضوعات مهم در سیستم کنترل است. مسائل کنترل بهینه اغلب در مدل سازی های سیستم های مهندسی به وجود می آیند. در حالت کلی یافتن جواب تحلیلی دشوار یا غیرممکن است. به مستقیم تقسیم می شوند. در این مقاله، مسئله کنترل بهینه را به معادله همیلتون - ژاکوبی - بلمن تبدیل که همین دلیل، محققان بسیاری به دنبال جواب های تقریبی برای این مسئله بوده اند. روش های تحلیلی شامل اصل ماکزیم پونتریاگین و حساب تغییرات هستند و روش های عددی به دو روش مستقیم و غیر مستقیم تقسیم می شوند. در این مقاله مسئله کنترل بهینه را به معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن تبدیل کرده، سپس این معادله را با روش تکرار تغییراتی که یک روش غیرمستقیم است، حل می کنیم.

### ۱. مقدمه

یکی از پر چالش ترین موضوعات در زمینه کنترل بهینه، کنترل بهینه غیر خطی سیستم می باشد. درحالت کلی روش مشخصی برای بدست آوردن جواب دقیق این مسائل وجود ندارد. لذا محققان به دنبال راه حلی برای بدست آوردن جواب تقریبی هستند. در این مقاله روش تکرار تغییراتی<sup>۱</sup> [۱] برای رده ای وسیع از مسائل کنترل بهینه غیر خطی با بررسی شرایط لازم بهینگی به کار خواهیم برد.

### ۲. آنالیز روش

مسئله کنترل بهینه

$$J(x, u) = \phi(t_f, x(t_f)) + \int_t^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt$$

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)); x(t_0) = x_0,$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 49M37; Secondary 49J15, 49J21, 76M30.  
واژگان کلیدی. مسئله کنترل بهینه، معادله همیلتون - ژاکوبی - بلمن، روش تکرار تغییراتی، حساب تغییرات.  
\* سخنران

<sup>۱</sup>Variational Iteration Method (VIM)

که  $x(t) \in A \subseteq \mathbb{R}^n$  متغیر حالت،  $A$  و  $U$  دو مجموعه بسته و کران دار  $f$  تابع پیوسته و نسبت به  $x$  مشتق پذیر را در نظر می گیریم. به دلیل تبدیل مسئله کنترل به معادله همیلتون - ژاکوبی - بلمن<sup>۲</sup> قرار می دهیم:

$$V(t, x) = \inf_{u \in \omega} \{ \phi(t_f, x(t_f)) + \int_t^{t_f} L(\theta, x(\theta), u(\theta)) d\theta \} = J(x, u^*). \quad (۱.۲)$$

$$u^* = \psi(t, x, V_x)$$

قضیه زیر را بکار می بریم:

قضیه ۱.۲. فرض کنید

$$V_t + \min_{u \in U} H(t, x, u, V_x) = 0$$

که

$$H(t, x, u, V_x) = V_x f(t, x, u) + L(t, x, u)$$

با قرار دادن مقدار انتهایی در (۱.۲) خواهیم داشت:

$$V(t_f, x(t_f)) = \phi(t_f, x(t_f))$$

در نتیجه دو شرط معادله  $HJB$  به صورت [۲]

$$(HJB) \begin{cases} V_t + H(t, x, u^*, V_x) = 0 \\ V(t_f, x(t_f)) = \phi(t_f, x(t_f)) \end{cases} \quad (۲.۲)$$

۳. حل معادله  $HJB$  با استفاده از روش تکرار تغییراتی

معادله (۲.۲) یک شرط لازم و کافی برای بهینگی است. به منظور بکار بردن روش تکرار تغییراتی معادله دیفرانسیل غیرخطی کلی

$$\mathbb{L}u + \mathbb{N}u = g(x) \quad (۱.۳)$$

را که  $L$  عملگر خطی و  $N$  عملگر غیرخطی و  $g(x)$  چند جمله ای ناهمگن است را در نظر می گیریم. فرض کنید  $u$  تابعی معلوم، قرار می دهیم  $\mathbb{L}(u + \epsilon) + \mathbb{N}(u + \epsilon) = g(x)$  پس می توان نوشت  $\mathbb{L}u + \mathbb{N}\tilde{u} = g(x)$  بنابراین با توجه به (۱.۳)

$$\mathbb{L}u + \mathbb{N}\tilde{u} - g(x) = 0$$

پس از انتگرالگیری  $\int_0^t (\mathbb{L}u(\xi) + \mathbb{N}\tilde{u}(\xi) - g(\xi)) d\xi = 0$  یا  $Tu = 0$  که  $T$  به عنوان عملگر می باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$u_{n+1} = u_n + Tu_n$$

با استفاده از ضریب لاگرانژ داریم:

$$u_{n+1}(t, x) = u_n(t, x) + \int_0^t \lambda(\xi) (\mathbb{L}u(\xi) + \mathbb{N}\tilde{u}(\xi) - g(\xi)) d\xi$$

با استفاده از شرط اول  $HJB$  می توان نوشت،

$$V_{n+1}(t, x) = V_n(t, x) + \int_t^{t_f} \lambda(\xi) \left( \frac{\partial V_n(\xi, x)}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{V}_n(\xi, x)}{\partial x} f(\xi, x, \psi) + L(\xi, x, \psi) \right) d\xi$$

<sup>۲</sup> Hamilton Jacobi Bellman (HJB)

در نتیجه

$$\delta V_{n+1}(t, x) = \delta V_n(t, x) + \delta \left( \int_t^{t_f} \lambda(\xi) \frac{\partial V_n(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi \right)$$

و بنابراین  $\lambda = 1$ . با انتخاب  $V_0(t, x) = \phi(t, x(t))$  مقدار  $V_{n+1}(t, x)$  برای  $n \geq 0$  به دست می آید. لذا جواب به صورت  $V(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(t, x)$  محاسبه می شود.

#### ۴. آنالیز همگرایی

همگرایی روش ارائه شده را می توان به کمک قضایای زیر نتیجه گرفت:

**قضیه ۱.۴.** فرض کنید عملگر  $D$  انقباضی است در این صورت:  
الف) عضوی منحصر به فرد مانند  $v$  در مجموعه فشرده  $K$  وجود دارد به طوری که

$$V = D(V)$$

ب) برای هر  $v_0 \in K$  دنباله  $\{V_n\}_{n=0}^\infty \in K$  به صورت،

$$V_{n+1} = D(V_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

تعریف می شود که همگرا به  $v$  است [۳].

**قضیه ۲.۴.** فرض کنید  $A$  یک عملگر از فضای هیلبرت  $H$  به  $H$  باشد. اگر به ازای هر  $k \in N \cup \{0\}$ ،  $0 \leq \gamma < 1$  وجود داشته باشد به طوری که  $\|v_{k+1}\| \leq \gamma \|v_k\|$ . آن گاه سری  $V(t, x) = \sum_{k=0}^\infty v_k(t, x)$  به جواب معادله  $HJB$ ، همگراست [۴].

**قضیه ۳.۴.** اگر سری  $V(t, x) = \sum_{k=0}^\infty v_k(t, x)$  که جواب معادله  $HJB$  است، همگرا باشد، آنگاه این سری یک جواب دقیق از معادله غیرخطی (۱.۳) است [۴].

**گزاره ۴.۴.** اگر برای هر  $i \in N \cup \{0\}$  پارامتر

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{\|v_{i+1}\|}{\|v_i\|}, & \|v_i\| \neq 0 \\ V(t_f, x(t_f)) = \phi(t_f, x(t_f)), & \|v_i\| = 0 \end{cases}$$

را تعریف کنیم، آنگاه سری  $V(t, x) = \sum_{k=0}^\infty v_k(t, x)$  به ازای هر  $i \in N \cup \{0\}$  و  $0 \leq \beta_i < 1$  همگرا به یک جواب دقیق است.

#### ۵. مثال های عددی

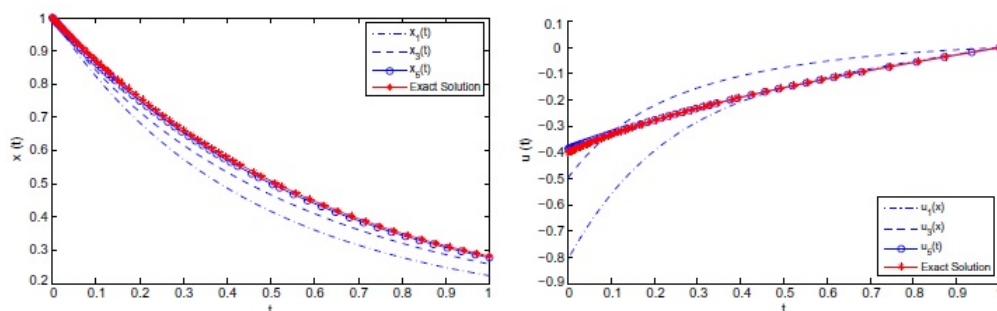
در این بخش با استفاده از روش ارائه شده و به کمک نرم افزار *Maple* جواب تقریبی دو مثال بدست آمده است و مقادیر جواب تقریبی با استفاده از روش تکرار تغییراتی، آدومیان [۵] و هموتوبی [۶] و نیز خطای مطلق محاسبه، به منظور مقایسه در جداول درج شده است.

##### مثال ۱.۵. مسئله کنترل بهینه

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (u^2(t) + x^2(t)) dt \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$s.t : \dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 1$$

را در نظر بگیرید. (جواب دقیق  $J = 0.192909295$ ) با استفاده از روش ارائه شده مقادیر جواب تقریبی به صورت نمودار (۱) و جدول (۱) بدست می آید.



شکل ۱: مقایسه جواب تقریبی  $x(t)$  و  $u(t)$  برای  $n$  های مختلف با جواب واقعی

جدول ۱: مقادیر واقعی و خطا برای مثال (۱.۵)

| $n$ | $VIM$       | خطا                  | $ADM$       | خطا                  | $HPM$       | خطا                  |
|-----|-------------|----------------------|-------------|----------------------|-------------|----------------------|
| 1   | 0.218360008 | $2.5 \times 10^{-2}$ | 0.224030251 | $3.1 \times 10^{-2}$ | 0.218360008 | $2.5 \times 10^{-2}$ |
| 3   | 0.200652631 | $7.7 \times 10^{-3}$ | 0.212708623 | $2.0 \times 10^{-2}$ | 0.193097636 | $1.9 \times 10^{-4}$ |
| 5   | 0.193294416 | $3.8 \times 10^{-4}$ | 0.206778119 | $1.4 \times 10^{-2}$ | 0.194059806 | $1.1 \times 10^{-3}$ |
| 7   | 0.192914197 | $4.9 \times 10^{-6}$ | 0.203602923 | $1.1 \times 10^{-2}$ | 0.193415452 | $5.1 \times 10^{-4}$ |

مثال ۲.۵. مسئله کنترل بهینه

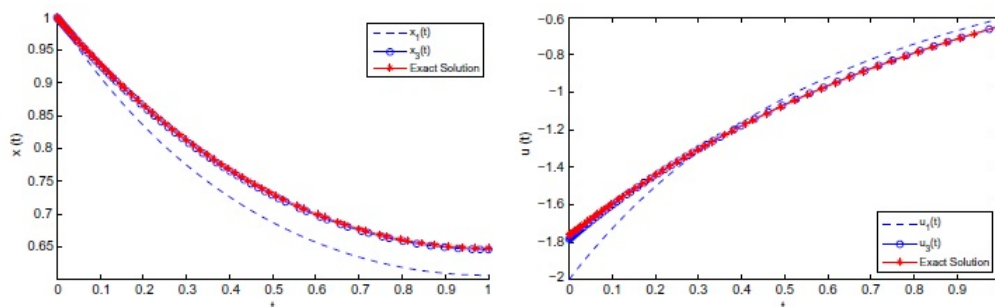
$$J = x^2(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$$

$$s.t : \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = 1$$

را در نظر بگیرید. (جواب دقیق  $J = 1.09078425$ ) پس از محاسبه مقادیر نمودار (۲) و جدول (۲) خواهیم داشت:

جدول ۲: مقادیر واقعی و خطا برای مثال (۲.۵)

| $n$ | $VIM$      | خطا                  | $ADM$      | خطا                  | $HPM$      | خطا                  |
|-----|------------|----------------------|------------|----------------------|------------|----------------------|
| 1   | 1.06845960 | $2.2 \times 10^{-2}$ | 1.06845960 | $2.2 \times 10^{-2}$ | 1.06845960 | $2.2 \times 10^{-2}$ |
| 3   | 1.08949369 | $1.3 \times 10^{-3}$ | 1.09849888 | $7.7 \times 10^{-3}$ | 1.09849888 | $7.7 \times 10^{-3}$ |
| 5   | 1.09075706 | $2.7 \times 10^{-5}$ | 1.08869787 | $2.1 \times 10^{-3}$ | 1.08869787 | $2.1 \times 10^{-3}$ |



شکل ۲: مقایسه جواب تقریبی  $x(t)$  و  $u(t)$  برای  $n$  های مختلف با جواب واقعی

### ۶. نتیجه گیری

جواب عددی مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش تکرار تغییراتی محاسبه شد. از مقادیر بدست آمده در جداول ملاحظه می کنیم که خطا در روش  $VIM$  از روش های  $ADM$ <sup>۳</sup> و  $HPM$ <sup>۴</sup> کمتر است، لذا این روش مناسب تر است و با توجه به نمودارها جواب روش تغییراتی با جواب واقعی تقریباً یکی است.

### مراجع

1. B. Kafash, A. Delavarkhalafi, S. M. Karbassi, Application of variational iteration method for Hamilton-Jacobi-Bellman equation, Appl. Math. Model, **37** (2013) 3917-3928.
2. W. H. Fleming, C. J. Rishel, Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer Verlag, New York, (1975).
3. K. Atkinson, Theoretical Numerical Analysis, Functional Analysis Framework, Third ed, Springer, (2009).
4. Z.M. Odibat, A study on the convergence of variational iteration method, Math. Comput. Model. **51** (2010) 1181-1192.
5. A. Fakharian, M.T. Hamidi Beheshti, A. Davari, Solving the Hamilton-Jacobi-Bellman equation using Adomian decomposition method, Int. J. Comput. Math. **87** (2010) 2769-2785.
6. H. Saberi Nik, S. Effati, M. Shirazian, An approximate-analytical solution for the Hamilton-Jacobi-Bellman equation via homotopy perturbation method, Appl. Math. Model. **36** (2012) 5614-5623.

<sup>۳</sup>Adomian decomposition method (ADM)

<sup>۴</sup>Homotopy perturbation method (HPM)