



یافتن جواب بهینه‌ی مسائل فیزیولوژیک با استفاده از توابع اسپلاین پایه ای

هانیه رجبی^{۱*}، علی وثوقی نیا^۲، و امین رفیعی^۳

^{۱,۲} گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری

haniyerajabi@yahoo.com

alivosuqinia@gmail.com

^۳ گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری

rafiei.am@gmail.com

چکیده. هدف از این مقاله، یافتن جواب بهینه‌ی معادلات مقدار مرزی درجه دوم غیر خطی تکین در مسائل فیزیولوژیک می‌باشد. معادله‌ی مورد نظر را به دو روش تقریب می‌زنیم. ابتدا با معرفی بی اسپلاین درجه سوم و مشتقات آن و سپس با استفاده از اسپلاین‌های مکعبی و در نظر گرفتن تقریب اولیه مناسب $y_0(x)$ ، برای تابع $y(x)$ به فرایند یافتن جواب بهینه‌ی مساله می‌پردازیم.

۱. مقدمه

مساله‌ی مقدار مرزی

$$y'' + \frac{m}{x}y' = f(x, y) \quad (1.1)$$

با شرایط مرزی $\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = \gamma_1$ و $\alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = \gamma_2$ در بازه $[0, 1]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $f(x, y) \in C([0, 1] \times \mathbb{R})$. برای حالتی که $\alpha_2 = \gamma_2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ ، مساله $(l, k \in \mathbb{R}^+)$ به ازای $m = 2$ $f(x, y) \equiv f(y) \equiv \frac{ly}{y+k}$ نظیر به انتشار اکسیژن در سلول‌های بدن و مساله $f(x, y) \equiv f(y) \equiv -le^{-lky}$ مدل هدایت گرمایی در مغز انسان است [۱].

۲. آنالیز روش

۱.۲. بی اسپلاین درجه ۳. فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ ، $n+1$ نقطه هم محلی در بازه $[a, b]$ باشند، به طوری که $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ افزاز $x_i = a + ih$ ، $i = 0, 1, \dots, n$ ، $h = \frac{b-a}{n}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $S_3[\pi]$ ، فضای چند جمله ایی های درجه سه که قطعه قطعه ایی، پیوسته مشتق

2010 Mathematics Subject Classification. 41A15, 65D07, 34G20

واژگان کلیدی. اسپلاین مکعبی، بی اسپلاین، مساله مقدار مرزی.
* سخنران

پذیر در π باشند. بی اسپلین های پایه در $S_3[\pi]$ را در نظر بگیرید. بی اسپلین های درجه سوم $B_{3,i}$ روی بازه $[x_i, x_{i+4}]$ به صورت زیر تعریف شده اند [۲]:

$$B_{3,i}(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (x-x_i)^3 & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ h^3 + 3h^2(x-x_{i+1}) + 3h(x-x_{i+1})^2 - 3(x-x_{i+1})^3 & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+3}-x) + 3h(x_{i+3}-x)^2 - 3(x_{i+3}-x)^3 & x \in [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ (x_{i+4}-x)^3 & x \in [x_{i+3}, x_{i+4}] \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال، معادلات (۱.۱) را در نظر می گیریم. با توجه به تکین بودن نقطه $x=0$ معادله را در این نقطه بهبود می دهیم. با استفاده از قانون هوپیتال مساله مقدار مرزی و شرایط مرزی به شکل زیر تبدیل می شود:

$$y''(x) + p(x)y'(x) = r(x, y), \quad y'(0) = 0, \quad \alpha y(1) + \beta y'(1) = \gamma \quad (۱.۲)$$

به طوری که $p(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ \frac{m}{x} & (x \neq 0) \end{cases}$, $r(x, y) = \begin{cases} \frac{f(0,y)}{m+1} & (x=0) \\ f(x,y) & (x \neq 0) \end{cases}$ حال معادله $y''(x) + p(x)y'(x) = r(x, y)$ برای محاسبه جواب تقریبی معادله (۱.۱) معرفی می کنیم. فرض کنیم معادله فوق یک جواب تقریبی معادله باشد به طوری که c_i ها ضرایب مجهول حقیقی و $B_{3,i}$ توابع بی اسپلین باشند. با قرار دادن $S(x)$ در معادله (۱.۲) خواهیم داشت:

$$S''(x) + p(x)S'(x) = r(x, y), \quad S'(0) = 0, \quad \alpha S(1) + \beta S'(1) = \gamma \quad (۲.۲)$$

$$\sum_{i=-3}^{n-1} c_i B_{3,i}''(x) + p(x) \sum_{i=-3}^{n-1} c_i B_{3,i}'(x) = r \left(x, \sum_{i=-3}^{n-1} c_i B_{3,i}(x) \right), \quad (۳.۲)$$

$$\sum_{i=-3}^{n-1} c_i B_{3,i}'(0) = y'(0), \quad \alpha \sum_{i=-3}^{n-1} c_i B_{3,i}(1) + \beta \sum_{i=-3}^{n-1} c_i B_{3,i}'(1) = \gamma \quad (۴.۲)$$

با قرار دادن نقاط هم محلی x_i در معادله (۳.۲) و با توجه به شرایط مرزی (۴.۲) یک دستگاه با $n+3$ معادله غیر خطی حاصل می شود. در بازه ی مورد نظر با توجه به شرایط ساخت بی اسپلین درجه سه، $n-3$ بی اسپلین تشکیل می شود. کافیت شش بی اسپلین دیگر در بازه های $[x_{n-3}, x_{n+1}]$, $[x_{n-2}, x_{n+1}]$, $[x_{n-1}, x_3]$, $[x_{-2}, x_2]$, $[x_{-1}, x_3]$, $[x_{-3}, x_1]$ ایجاد کنیم که در نهایت یک دستگاه معادلات جبری غیر خطی با $n+3$ معادله و $n+3$ مجهول تشکیل شده، که با حل این دستگاه ضرایب مجهول C محاسبه می شوند و با قرار دادن این ضرایب در رابطه $S(x)$ یک تقریب برای معادله (۱.۱) بدست می آید.

۲.۲. اسپلین مکعبی. فرض کنید S یک چند جمله ایی قطعه ایی پیوسته از درجه حداکثر k است، که دارای مشتق های پیوسته تا درجه ی $k-1$ ام می باشد. اگر $k=3$ آنگاه اسپلین را اسپلین مکعبی نامند [۳]. ابتدا یک تقریب اولیه مناسب برای تابع $y(x)$ انتخاب و آن را $y_{(0)}(x)$ می نامیم و $f(x, y)$ را حول $y_{(0)}(x)$ بسط می دهیم. به طور کلی برای $u=0, 1, 2, \dots$ داریم:

$$f(x, y_{(u+1)}) = f(x, y_{(u)}) + (y_{(u+1)} - y_{(u)}) \left(\frac{\partial f(x, y_{(u)})}{\partial y} \right) + (y_{(u+2)} - y_{(u+1)}) \left(\frac{\partial f(x, y_{(u+1)})}{\partial y} \right) + \dots \quad (۵.۲)$$

اینک با جایگزاری رابطه (۵.۲) در معادله فوق داریم:

$$y_{(u+1)}''(x) + \frac{m}{x} y_{(u+1)}'(x) - \left(\frac{\partial f(x, y_{(u)})}{\partial y} \right) y_{(u+1)}(x) = f(x, y_{(u)}) - \left(\frac{\partial f(x, y_{(u)})}{\partial y} \right) y_{(u)}$$

با جایگذاری معادله (۵.۲) در معادله (۱۰.۱) داریم:

$$y''_{(u+1)}(x) + \frac{m}{x} y'_{(u+1)}(x) + a_{(u)}(x) y_{(u+1)}(x) = b_{(u)}(x) \quad u = 0, 1, 2, \dots \quad (۶.۲)$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow y'_{(u+1)}(0) = 0, \quad \alpha y(1) + \beta y'(1) = \gamma \Rightarrow \alpha y_{(u+1)}(1) + \beta y'_{(u+1)}(1) = \gamma$$

به طوری که $b_{(u)}(x) = f(x, y_{(u)}) - y_{(u)} \left(\frac{\partial f(x, y_{(u)})}{\partial y} \right)$ ، $a_{(u)}(x) = - \left(\frac{\partial f(x, y_{(u)})}{\partial y} \right)$ برای حل مساله

مقدار مرزی غیر خطی تکین داده شده، معادله (۶.۲) را داریم. ابتدا نقطه $x = 0$ را در معادله مذکور قرار می دهیم و سپس روش اسپلاین مکعبی را به کار می بریم. با استفاده از قانون هوپیتال مسائل مقدار مرزی به شکل زیر تبدیل می شوند:

$$y''_{(u+1)}(x) + p_{(u)}(x) y'_{(u+1)}(x) + q_{(u)}(x) y_{(u+1)}(x) = r_{(u)}(x), \quad u = 0, 1, 2, \dots \quad (۷.۲)$$

$$y_{(u+1)}(0) = 0, \quad \alpha y_{(u+1)}(1) + \beta y'_{(u+1)}(1) = \gamma$$

به طوری که $p_{(u)}(x) = \begin{cases} \frac{a_{(u)}(0)}{m+1} & (x=0) \\ a_{(u)}(x) & (x \neq 0) \end{cases}$ ، $q_{(u)}(x) = \begin{cases} \frac{b_{(u)}(0)}{m+1} & (x=0) \\ b_{(u)}(x) & (x \neq 0) \end{cases}$ ، $r_{(u)}(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ \frac{m}{x} & (x \neq 0) \end{cases}$ بسط تابع $y_{(u+1)}(x)$ در بازه $[x_0, x_1]$ به صورت

$$S_{(u+1)}(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3, \quad u = 0, 1, 2, \dots$$

تشکیل می شود. در گام بعدی در بازه $[x_1, x_2]$ جمله $d_1(x - x_1)^3$ را به $S_{(u+1)}(x)$ اضافه می کنیم و به همین ترتیب ادامه می دهیم تا به x_n برسیم. بنابراین به طور کلی $S_{(u+1)}(x)$ را به فرم زیر نشان می دهیم:

$$S_{(u+1)}(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 + d_1(x - x_1)^3 + \dots + d_{n-1}(x - x_{n-1})^3, \quad u = 0, 1, \dots \quad (۸.۲)$$

که در آن $a, b, c, d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ ضرایب مجهول هستند. اسپلاین مکعبی $S_{(u+1)}(x)$ تابع $y_{(u+1)}(x)$ را در x_i ها درونیایی می کند. به طوری که مشتق اول و دوم آن در بازه $[0, 1]$ پیوسته اند و بنابراین $S_{(u+1)}(x_i) \approx y_{(u+1)}(x_i)$. اگر $S_{(u+1)}(x)$ یک چندجمله ای مکعبی روی بازه $[x_{i-1}, x_i]$ باشد، آنگاه داریم:

$$S_{(u+1)}(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 + d_1(x - x_1)^3 + \dots + d_{i-1}(x - x_{i-1})^3, \quad u = 0, 1, \dots \quad (۹.۲)$$

با قرار دادن تقریب اسپلاین های $S_{(u+1)}(x)$ ، $S'_{(u+1)}$ ، $S''_{(u+1)}$ در نقطه x_i ، معادله (۷.۲) به فرم زیر تبدیل می شود.

$$S_{(u+1)}(x_i) + p_{(u),i} S'_{(u+1)}(x_i) + q_{(u),i} S_{(u+1)}(x_i) = r_{(u),i} \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad u = 0, 1, \dots$$

با جایگذاری $S_{(u+1)}(x)$ و مشتقات آن در معادله فوق به ازای $i = 0, 1, \dots, n$ داریم:

$$aq_{(u),i} + b \left[q_{(u),i}(x_i - x_0) + p_{(u),i} \right] + c \left[q_{(u),i}(x_i - x_0)^2 + 2p_{(u),i}(x_i - x_0) + 2 \right] + \sum_{j=0}^{i-1} d_j \left[q_{(u),i}(x_i - x_j)^3 + 3p_{(u),i}(x_i - x_j)^2 + 6(x_i - x_j) \right] = r_{(u),i}, \quad (۱۰.۲)$$

$$b + 2c(x_0 - x_0) + 3d_0(x_0 - x_0)^2 + 3d_1(x_0 - x_0)^2 + \dots + 3d_{n-1}(x_0 - x_0)^2 = 0 \Rightarrow b = 0 \quad (۱۱.۲)$$

$$a\alpha + b \left[\alpha(x_n - x_0) + \beta \right] + c \left[\alpha(x_n - x_0)^2 + 2\beta(x_i - x_0) \right] + \sum_{m=0}^{n-1} d_m \left[\alpha(x_n - x_m)^3 + 3\beta(x_n - x_m)^2 \right] = \gamma \quad (۱۲.۲)$$

با استفاده از روابط (۱۰.۲) تا (۱۲.۲) دستگاه معادلات خطی $Az = B$ تشکیل می شود.

به طوری که $z = (d_{n-1}, d_{n-2}, \dots, c, b, a)$ ضرایب مجهول و $B = (\gamma, r_{(u),n}, r_{(u),n-1}, \dots, r_{(u),0}, 0)^T$ مقادیر معلوم و A به صورت یک ماتریس بالا هسنبرگی تشکیل می‌شود. در ماتریس A شرایط مرزی (۱۲.۲)، سطر اول را تشکیل می‌دهد. با قرار دادن $n+1$ نقطه هم محلی در معادله (۱۰.۲) سطر ۲ تا $n+2$ ماتریس A تشکیل می‌شود. به طوری که $x_0 = 0$ سطر $n+2$ و $x_1 = 1$ سطر $n+1$ و به همین ترتیب $x_n = n$ سطر دوم ماتریس A را تشکیل می‌دهد. شرایط مرزی (۱۱.۲) نیز، سطر آخر ماتریس A را تشکیل می‌دهد. بنابراین یک دستگاه $n+3$ معادله و $n+3$ مجهول $d_{n-1}, d_{n-2}, \dots, d_0, c, b, a$ تشکیل می‌شود. با فرض مقدار اولیه $y_{(0)}(0) = 0$ مقادیر $q_{(u),i}$ و $r_{(u),i}$ را محاسبه می‌کنیم. با معلوم شدن بردار ضرایب z و جایگزین کردن آن‌ها در معادله (۹.۲)، مقدار تقریبی $y_{(1)}(x) \approx S_{(1)}(x)$ به دست می‌آید. در نهایت مقدار تقریبی $S_{(u+1)}(x)$ در تکرار $(u+1)$ به دست می‌آید. با جایگزین کردن مجهولات، مقدار $y_{(u+1)}(x) \approx S_{(u+1)}(x)$ به دست می‌آید.

مثال ۱.۲. مساله $y''(x) + \frac{m}{x}y'(x) = -e^{-y(x)}$ با شرایط مرزی $y'(0) = 0$ و $y(1) = 0$ که در مرجع [۲] بیان شده را در نظر می‌گیریم. معادله فوق به کمک دو روش مذکور حل و نتایج در جدول (۱) درج شده است. منظور از خطای تخمینی در جدول، مقدار $|y_{n+1} - y_n|$ می‌باشد که n تعداد تقسیم بندی بازه $[0, 1]$ است.

جدول ۱: مقایسه جواب های تقریبی روش های بی اسپالین و اسپالین مکعبی

بی اسپالین		اسپالین مکعبی		x
خطای تخمینی n=8	خطای تخمینی n=9	خطای تخمینی n=8	خطای تخمینی n=9	
1.392×10^{-5}	9.938×10^{-6}	1.625×10^{-4}	1.337×10^{-4}	0.0
1.385×10^{-5}	9.875×10^{-6}	1.112×10^{-4}	9.333×10^{-5}	0.1
1.37×10^{-5}	9.780×10^{-6}	7.318×10^{-5}	6.131×10^{-5}	0.2
1.353×10^{-5}	9.687×10^{-6}	4.295×10^{-5}	3.672×10^{-5}	0.3
1.328×10^{-5}	9.546×10^{-6}	2.075×10^{-5}	1.862×10^{-5}	0.4
1.296×10^{-5}	9.347×10^{-6}	5.414×10^{-6}	6.059×10^{-6}	0.5
1.261×10^{-5}	9.081×10^{-6}	4.277×10^{-6}	1.94×10^{-6}	0.6
1.219×10^{-5}	8.736×10^{-6}	9.508×10^{-6}	6.330×10^{-6}	0.7
1.161×10^{-5}	8.3×10^{-6}	1.147×10^{-5}	8.067×10^{-6}	0.8
1.086×10^{-5}	7.759×10^{-6}	1.136×10^{-5}	8.109×10^{-6}	0.9
9.926×10^{-6}	7.103×10^{-6}	1.036×10^{-5}	7.416×10^{-6}	1.0
1.55	1.7	11.2	13.71	CPU.T(s)

۳. نتیجه

جواب بهینه‌ی معادله‌ی مقدار مرزی (۱۰.۱)، با دو روش بی اسپالین و اسپالین مکعبی به ازای n های مختلف به کمک نرم افزار متلب به دست آمده و خطای تخمینی به ازای $n = 8, 9$ نشان داده شده است. جدول (۱)، نشان می‌دهد که روش بی اسپالین جواب های بهینه تری نسبت به اسپالین مکعبی دارد و همچنین می‌توان به زمان اجرای کمتر این روش نیز اشاره کرد.

مراجع

- McElwain, D. L. S. "A re-examination of oxygen diffusion in a spherical cell with Michaelis-Menten oxygen uptake kinetics." *Journal of Theoretical Biology* 71.2 (1978): 255-263.
- Çağlar, Hikmet, Nazan Çağlar, and Mehmet Özer. "B-spline solution of non-linear singular boundary value problems arising in physiology." *Chaos, Solitons, Fractals* 39.3 (2009): 1232-1237.
- Kanth, ASV Ravi, and Vishnu Bhattacharya. "Cubic spline for a class of non-linear singular boundary value problems arising in physiology." *Applied Mathematics and Computation* 174.1 (2006): 768-774.