



بهبود جواب تقریبی معادلات انتگرال تعمیم یافته‌ی آبل خطی به کمک الگوریتم ترکیبی تبدیل لاپلاس و هم‌محلی ژاکوبی

علی وثوقی نیا^{۱*}، محمد علی پرتانیان^۲، و مرضیه دلک آبادی^۳

^{۱,۲,۳} گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری

alivosuqinia@gmail.com

m.partanian@hsu.ac.ir

marziyedelkabadi@gmail.com

چکیده. در این مقاله، الگوریتمی ترکیبی از تبدیل لاپلاس و روش هم‌محلی ژاکوبی برای حل معادلات انتگرال آبل تعمیم یافته ارائه خواهیم کرد. در ابتدا تابع مجهول را با توابع پایه ای تقریب زده و با استفاده از تبدیل لاپلاس، هسته منفرد معادلات به نامنفرد و به کمک روابط ماتریس بدست آمده، معادلات انتگرال مذکور به دستگاه معادلات خطی جبری تبدیل می‌گردند. جواب عددی دو مثال با استفاده از کد متلب جهت نشان دادن دقت و کارایی روش بدست آورده و با روش های هموتوبی و چیبیشف مقایسه شده است.

۱. مقدمه

معادلات انتگرال آبل تعمیم یافته در مدل سازی علوم نظیر فیزیک، اخترفیزیک، مکانیک جامد، نظریه پراکندگی، فیزیک پلاسما و ... حاصل می‌شود که حل تحلیلی آن غالباً دشوار بوده و نیاز به رویکرد ساده برای تقریب و حل آنها می‌باشد [۱]. معادله انتگرال ولترای منفرد:

$$\lambda_1 u(x) + \lambda_2 \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\eta} dt = g(x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1 \quad (1.1)$$

که $u(x) \in L^2[0, 1]$ ، g تابع پیوسته و λ_1, λ_2 اعداد حقیقی هستند، در نظر می‌گیریم. پیش از بیان آنالیز روش، چند جمله ای ژاکوبی انتقال یافته و دو خاصیت مورد نیاز ارائه می‌کنیم. چند جمله ای ژاکوبی انتقال یافته

$$P_n^{\alpha, \beta} = \sum_{s=0}^n \binom{n+\alpha}{s} \binom{n+\beta}{n-s} (x-1)^{n-s} (x)^s, \quad (2.1)$$

که از بازه‌ی $[-1, 1]$ به $[0, 1]$ با تبدیل $(x \rightarrow 2x-1)$ نتیجه می‌شود را در نظر گرفته که دارای دو خاصیت:

2010 Mathematics Subject Classification. 45D05, 45E10

واژگان کلیدی. تبدیل لاپلاس، روش هم محلی ژاکوبی، چندجمله‌ای های ژاکوبی، معادلات انتگرال آبل تعمیم یافته.

* سخنران

(۱)

$$P_i^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{k=0}^i \gamma_k^{(i)} x^k, \quad \gamma_k^{(i)} = (-1)^{i-k} \binom{i+k+\alpha+\beta}{k} \binom{i+\alpha}{i-k}.$$

(۲)

$$\int_0^1 x^p P_n^{(\alpha, \beta)}(x) w^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{n-l} \Gamma(n+\beta+1) \Gamma(n+l+\alpha+\beta+1) \Gamma(p+l+\beta+1) \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(l+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1) \Gamma(p+l+\alpha+\beta+2) (n-1)!!} = a_j^p \times \theta_j, \quad 0 \leq p.$$

که $\theta_j = \frac{\Gamma(j+\alpha+1) \Gamma(j+\beta+1)}{(2j+\alpha+\beta+1)(j)! \Gamma(j+\alpha+\beta+1)}$ است [۲].

۲. آنالیز روش

با بکاربردن توابع پایه ای ژاکوبی بسط سری تابع $u(x)$ و مجموع متناهی $u_N(x)$ را به شکل زیر نوشته و برای بدست آوردن جواب تقریبی (۱.۱) قضایای زیر را نیز مورد استفاده قرار می دهیم [۱].

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j^{(\alpha, \beta)}(x), \quad u_N(x) = \sum_{j=0}^N C_j P_j^{(\alpha, \beta)}(x) = \Phi^T(x) C = C^T \Phi(x).$$

که C و $\Phi(x)$ به صورت:

$$C = [C_0, C_1, \dots, C_N]^T, \quad \Phi(x) = [P_0^{(\alpha, \beta)}(x), P_1^{(\alpha, \beta)}(x), \dots, P_N^{(\alpha, \beta)}(x)]^T.$$

می باشند.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $0 < \eta < 1$ در این صورت:

$$\int_0^x \frac{t^k}{(x-t)^\eta} dt = \frac{\Gamma(k+1) \Gamma(1-\eta)}{\Gamma(k-\eta+2)} x^{k-\eta+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

قضیه ۲.۲. اگر $0 < \eta < 1$, $u(x) \in L^2[0, 1]$ و $u(x) \simeq \Phi^T(x) C$ آنگاه:

$$\int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\eta} dt \simeq C^T \mathbf{B}^\eta \Phi(x), \quad (1.2)$$

که $\mathbf{B}^\eta$ ماتریس $(N+1) \times (N+1)$ که درایه های آن به صورت:

$$\mathbf{B}_{ij}^\eta = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\gamma_k^{(i-1)} \Gamma(k+1) \Gamma(1-\eta)}{\Gamma(k-\eta+2)} a_{j-1}^{(k-\eta+1)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N+1,$$

می باشد و $\gamma_k^{(l)}$ و $a_j^{(n)}$ با استفاده از خواص (۱) و (۲) بدست می آیند.
با جایگذاری (۱.۲) در (۱.۱) خواهیم داشت:

$$\lambda_1 \Phi^T(x) C + \lambda_2 \mathbf{B}^{(\eta)} \Phi(x) C - g(x) \simeq 0, \quad (2.2)$$

با قرار دادن $(N + 1)$ نقطه‌ی هم‌محلی که از ریشه‌های $(N + 1)$ امین چند جمله‌ای ژاکوبی انتقال یافته محاسبه می‌شود را در معادله (۲.۲) قرار داده و دستگاه $(N + 1)$ معادله $(N + 1)$ مجهول نتیجه و پس از حل دستگاه جواب تقریبی بدست خواهد آمد.

۳. آنالیز خطا

در فضای کامل $\mathbb{P}^N = \text{span}\{R_0^{(\alpha,\beta)}(x), R_1^{(\alpha,\beta)}(x), \dots, R_N^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ که

$$R_i^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{P_i^{(\alpha,\beta)}(x)}{\sqrt{\theta_i}}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

$u_n(x)$ به $u(x)$ همگرا است. عملگر خطی آبل L را با فرض $Lu(x) = f(x)$ در نظر گرفته و با قرار دادن $u_n(x)$ در معادله (۱.۱) می‌توان نوشت:

$$e_N(x) = u(x) - u_N(x), \quad Lu_N(x) = f(x) + G_N(x).$$

و لذا خواهیم داشت: $Le_N(x) = -G_N(x)$ در نتیجه مقدار خطا محاسبه و با افزایش n دنباله خطا به صفر همگرا می‌شود [۱].

۴. مثال‌های عددی

الگوریتم ترکیبی و نرم افزار متلب را برای محاسبه‌ی جواب عددی دو مثال بکار می‌بریم. در مثال (۱.۴) به منظور مقایسه با مقادیر روش هموتوبی [۳] خطای مطلق به ازای $\alpha = \beta = 3$ و $n = 25$ در نظر گرفته که نتایج در جدول (۱) آورده شده است. در مثال (۲.۴) $\alpha = \beta = 1, n = 4$ به جهت مقایسه با مقادیر خطای مطلق چیبیشف [۴] اختیار شده و نتایج در جدول (۲) درج شده است. خطای تخمینی $(|y_{n+1} - y_n|)$ نیز به منظور نشان دادن همگرایی روش محاسبه گردید.

مثال ۱.۴. معادله انتگرال آبل نوع دوم

$$u(x) = x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (۱.۴)$$

را در نظر می‌گیریم (جواب دقیق $u(x) = x^2$) لذا بنا به (۲.۲) می‌توان نوشت:

$$C^T \Phi(x) + C^T \mathbf{B}^{(\frac{1}{2})} \Phi(x) - x^2 - \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} \approx 0. \quad (۲.۴)$$

پس از بدست آوردن ریشه‌های $P_{26}^{(\alpha,\beta)}$ مسئله حل شده و نتایج حاصل در جدول (۱) درج گردیده است.

مثال ۲.۴. معادله انتگرال آبل نوع اول

$$\int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} dt = \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (۳.۴)$$

را در نظر می‌گیریم (جواب دقیق $u(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^{\frac{2}{3}}$)، (۳.۴) را به صورت معادله‌ی : $C^T \mathbf{B}^{(\frac{1}{2})} \Phi - \pi x \approx 0$ نوشته و پس از محاسبه توسط کد متلب مقادیر در جدول (۲) درج شده است.

جدول ۱: خطای تخمینی، مطلق و هموتوبی مثال (۱.۴)

x_i	$u(x_i)$	$u_n(x_i)$	خطای مطلق	خطای تخمینی	e_{HPTM}
0.1	0.01	0.00999999859861433	1.4013×10^{-9}	2.6803×10^{-10}	-
0.2	0.04	0.0399999991252966	8.7470×10^{-10}	1.2529×10^{-10}	1.4552×10^{-16}
0.3	0.09	0.0899999994075825	5.9241×10^{-10}	9.6514×10^{-11}	-
0.4	0.16	0.159999999575545	4.2445×10^{-10}	6.3171×10^{-11}	4.7685×10^{-12}
0.5	0.25	0.249999999683206	3.1679×10^{-10}	3.7984×10^{-11}	-
0.6	0.36	0.359999999755619	2.4438×10^{-10}	2.8030×10^{-11}	2.0881×10^{-9}
0.7	0.49	0.489999999808253	1.9174×10^{-10}	9.2768×10^{-13}	-
0.8	0.64	0.639999999859432	1.4056×10^{-10}	8.0582×10^{-10}	1.5625×10^{-7}
0.9	0.81	0.809999999846399	1.5360×10^{-10}	9.5231×10^{-9}	-
1.0	1.0	0.999999926882758	7.3117×10^{-8}	5.6775×10^{-8}	4.4410×10^{-6}

جدول ۲: جواب دقیق مقادیر عددی مثال (۲.۴)

x	جواب دقیق	$n = 4$ چی بیشف	$n = 4$ الگوریتم ترکیبی	خطای مطلق چی بیشف	خطای مطلق
0.1	0.279869	0.2731672602	0.274083471157687	0.00670201565313943	0.005785804696622
0.2	0.444264	0.4462624646	0.443402156173215	0.00199768170324654	0.000862626731494
0.3	0.582151	0.5862609697	0.583803023331523	0.00410941647052953	0.001651470057723
0.4	0.705226	0.7063027512	0.705827207634400	0.00107636754054352	0.000600823899041
0.5	0.818342	0.8159004113	0.817171162732084	0.00244231567453612	0.001171564246707
0.6	0.924107	0.9209391783	0.922686660923262	0.00316880970481558	0.00142132714849
0.7	1.024127	1.0236769074	1.024380793155070	0.000450331756202127	0.0002535539614
0.8	1.119477	1.1227440799	1.121415969023090	0.00326697650809948	0.001938865605852
0.9	1.210924	1.2131438036	1.210109916771357	0.00221977514663751	0.000814111758014
1.0	1.299038	1.2862518129	1.283935683292350	0.0127862927057498	0.015102422384308

۵. نتیجه

مقادیر جدول (۱) نشان می‌دهد که حداکثر خطا در الگوریتم ترکیبی 7.3117×10^{-8} و حداکثر خطای روش هموتوبی (HPTM) 4.44×10^{-6} است، همچنین ملاحظه می‌شود که خطا در روش هموتوبی (HPTM) به نقاط بازه بستگی دارد، در صورتی که خطا در روش مورد مطالعه به نقاط بستگی ندارد و تغییر ناچیز است. مقادیر جدول (۲) نمایانگر این است که خطای الگوریتم ترکیبی به استثنای نقطه‌ای انتهایی کمتر از روش چیبیشف می‌باشد.

مراجع

1. Kh. Sadri, A. Amini and C. Cheng, *A new operational method to solve abel's and generalized abel's integral equations*, Applied Mathematics and Computation, 317:49–67, 2018.
2. A. Borhanifar and Kh. Sadri, *A new operational approach for numerical solution of generalized functional integro-differential equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 279:80–96, 2015.
3. S. Kumar, A. Kumar, J. Singh and A. Singh, *Analytical solution of Abel integral equation arising in astrophysics via Laplace transform*, J. Egypt. Math. Soc. 23 :102–107, 2015.
4. MN.Sahlan, H.Feyzollahzadeh, *Operational matrices of Chebyshev polynomials for solving singular Volterra integral equations*, Mathematical Sciences 11.2 :165-171, 2017.