



National Seminar on
Control and Optimization

Nov 13-14, 2019



سومین سمینار ملی
کنترل و بهینه‌سازی

۲۳-۲۲ آبان ۱۳۹۸



راهبرد کنترل بهینه برای جلوگیری از انتشار شایعه توسط یک مدل SIR اصلاح شده

محمد شیرازیان^{۱*}، زهرا عمارلو^۲، و زهرا جانسریان^۳

^{۱,2,3} گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه نیشابور

shirazian@neyshabur.ac.ir

z_amarloo@yahoo.com

z.janserian@neyshabur.ac.ir

چکیده. با ظهور سریع شبکه‌های اجتماعی آنلاین، انتقال شایعه رو به رشد است و تأثیر قابل توجهی بر ثبات اجتماعی و زندگی انسان‌ها دارد. این مقاله به بررسی محلی است که ثبات و کنترل بهینه یک مدل SIR برای انتشار شایعه در شبکه‌های اجتماعی آنلاین می‌پردازد که در آن تعداد افراد جامعه متغیر فرض شده است. ما یک مدل ارائه شده توسط ژو و همکاران در [۴] را اصلاح کرده و سپس به کنترل بهینه آن می‌پردازیم.

۱. مقدمه

با ظهور سریع و محبوبیت اینترنت، شبکه‌های اجتماعی آنلاین زیادی در زندگی روزمره ما وجود دارد. به عنوان مثال فیس بوک، تلگرام، اینستاگرام، واتساپ و غیره. چنین شبکه‌هایی، فضای مجازی را برای دسترسی مردم جهان به یکدیگر و تبادل اطلاعات فراهم می‌نماید. همچنین این شبکه‌ها بسیار انعطاف‌پذیر و بسیار فعال هستند تا کاربران آنلاین بتوانند آخرین اطلاعات خود را منتشر کنند. از طرف دیگر انتقال اطلاعات مضر به ویژه شایعه آنلاین بین کاربران شبکه‌های اجتماعی در حال افزایش است.

شایعه اطلاعاتی است که بدون تأیید رسمی انتقال می‌یابد و هیچ شکی نیست که تأثیر زیادی در زندگی اجتماعی دارد. شایعات همیشه به حق شهروندان آسیب می‌رسانند. مدل‌های ریاضی ابزاری کارآمد در بسیاری از زمینه‌ها از جمله مدل سازی انتشار شایعات، انتشار اطلاعات، و ویروس‌های رایانه‌ای و انتقال دانش می‌باشند. اولین تحقیق در مورد مدل‌های انتقال شایعه در دهه ۱۹۶۰ بود. در سال ۱۹۶۴ دالی و کندال اولین مدل انتقال شایعه کلاسیک را ایجاد کردند [۲]. این مدل، معروف به مدل SIR است که در آن تعداد افراد جامعه ثابت فرض شده است.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 49K15; Secondary 34A34.

واژگان کلیدی. شبکه‌های اجتماعی آنلاین، انتشار شایعه، مدل SIR ، کنترل بهینه.
* سخنران

نام پارامتر	توضیح
a	نرخ رشد کاربران جدید ثبت شده در هر ماه
b	میزان ظاهری کاربران غیر فعال در هر ماه
p_1	نرخ تبدیل کاربران S به R
p_2	نسبت تماس بین کاربران S و I_1
p_3	نسبت تماس بین کاربران I_1 و I_2
p_4	نسبت تماس بین کاربران R و I_1
p_5	نسبت تماس بین کاربران R و I_2

جدول ۱: تعریف پارامترهای مدل

در [۳] نویسندگان اصلاحی از مدل SIR [۱] را به شکل زیر ارائه کردند که در آن تعداد افراد جامعه متغیر فرض شده است:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS(t)}{dt} &= (a - b)S(t) - \gamma S(t)N(t) - p_1 S(t)I(t), \\
 \frac{dR(t)}{dt} &= p_1 S(t)I(t) - (p_2 + b + \gamma N(t))R(t), \\
 \frac{dI(t)}{dt} &= p_2 R(t) - (b + \gamma N(t))I(t), \\
 \frac{dN(t)}{dt} &= aS(t) - (b + \gamma N(t))N(t).
 \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

در بخش بعد این مدل را اصلاح می کنیم.

۲. مدل پیشنهادی انتشار شایعه

$$\begin{aligned}
 \frac{dS(t)}{dt} &= a - p_1 R(t) - p_2 S(t)I_1(t) - bS(t), \\
 \frac{dI_1(t)}{dt} &= p_2 S(t)I_1(t) - p_3 I_1(t)I_2(t) + p_4 R(t)I_1(t) - bI_1(t), \\
 \frac{dI_2(t)}{dt} &= p_3 I_1(t)I_2(t) + p_5 R(t)I_2(t) - bI_2(t), \\
 \frac{dR(t)}{dt} &= p_1 R(t) - p_4 R(t)I_1(t) - p_5 R(t)I_2(t) - bR(t), \\
 \frac{dN(t)}{dt} &= a - bN(t)
 \end{aligned}$$

در این مدل متغیرها به شکل زیر تعریف می شوند: $S(t)$: تعداد کاربران سالم که با شایعه تماس نداشته اند. $I_1(t)$: تعداد کاربران انتقال دهنده ای که با شایعه تماس داشته اند، آن را باور کرده و پخش کرده اند.

$I_2(t)$: تعداد کاربران که با شایعه تماس برقرار کرده‌اند، آن را باور کرده ولی پخش نکرده‌اند.
 $R(t)$: تعداد کاربرانی که با شایعه تماس برقرار کرده‌اند اما آن را باور نکرده و فوراً پخش نمی‌کنند.

لم ۱.۲. تعداد کاربران به ازای $t \in [0, \infty)$ همواره مقداری کراندار است.

برهان. از معادله آخر نتیجه می‌شود:

$$N(t) = \frac{a}{b} + ce^{-bt}.$$

بنابراین داریم

$$N(0) = \frac{a}{b} + c, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{a}{b} < \infty$$

□

۳. مساله کنترل بهینه

در این بخش، اقدام‌های مداخله‌کننده مانند گزارش رسانه‌ها را در نظر می‌گیریم. این اقدام‌های مداخله‌کننده می‌تواند با حداقل هزینه، تعداد کاربران انتقال دهنده را کاهش دهند.

با استفاده از تئوری کنترل بهینه که نشان‌دهنده تأثیر گزارش رسانه‌هاست، متغیر کنترل را تنظیم می‌کنیم:

u_1 : اقدامات مداخله‌کننده‌ای که باعث انتشار ندادن شایعه توسط کاربران I_1 می‌شود.
 u_2 : اقدامات مداخله‌کننده‌ای که باعث انتشار ندادن شایعه توسط کاربران R به صورت دائم می‌شود (اقدامات مداخله‌کننده‌ای که باعث تبدیل R به I_2 می‌شوند).

معادلات دیفرانسیل این مدل دو کنترلی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= a - p_1 R(t) - p_2 S(t) I_1(t) - b S(t), \\ \frac{dI_1(t)}{dt} &= p_2 S(t) I_1(t) - u_1 p_3 I_1(t) I_2(t) + p_4 R(t) I_1(t) - b I_1(t), \\ \frac{dI_2(t)}{dt} &= p_3 u_1 I_1(t) I_2(t) + u_2 p_5 R(t) I_2(t) - b I_2(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= p_1 R(t) - p_4 R(t) I_1(t) - u_2 p_5 R(t) I_2(t) - b R(t), \\ \frac{dN(t)}{dt} &= a - b N(t) \end{aligned}$$

همچنین تابع هدف را به صورت

$$w = \min \frac{1}{2} \int_0^T (u_1^2 + u_2^2) + I_1 dt$$

می‌گیریم که در آن

$$U = \{u(t) \in L^2(0, T) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq u(t) \leq 1\}.$$

با استفاده از نظریه کنترل بهینه، هامیلتونی مسأله فوق را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2}(u_1(t)^2 + u_2(t)^2) + I_1(t) + \mu_1(a - p_1R(t) - p_2S(t)I_1(t) - bS(t)) \\ & + \mu_2(p_2S(t)I_1(t) - u_1p_3I_1(t)I_2(t) + p_4R(t)I_1(t) - bI_1(t)) \\ & + \mu_3(p_3u_1I_1(t)I_2(t) + u_2p_5R(t)I_2(t) - bI_2(t)) \\ & + \mu_4(p_1R(t) - p_4R(t)I_1(t) - u_2p_5R(t)I_2(t) - bR(t)). \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از هامیلتونی، شرایط بهینگی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow u_1 - \mu_2p_3I_1(t)I_2(t) + \mu_3p_3I_1(t)I_2(t) = 0.$$

$$u_1^* = p_3I_1(t)I_2(t)(\mu_2 - \mu_3).$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow u_2 + \mu_3p_5R(t)I_2(t) - \mu_4p_5R(t)I_2(t) = 0.$$

$$u_2^* = p_5R(t)I_2(t)(\mu_4 - \mu_3).$$

$$\dot{\mu}_1 = -\frac{\partial H}{\partial S} = \mu_1p_2I_1(t) - \mu_2p_2I_1(t) + \mu_1b,$$

$$\dot{\mu}_2 = -\frac{\partial H}{\partial I_1} = -1 + \mu_1p_2S(t) - \mu_2p_2S(t) + \mu_2u_1p_3I_2(t) - \mu_2p_4R(t) + \mu_2b,$$

$$\dot{\mu}_3 = -\frac{\partial H}{\partial I_2} = -\mu_3p_3u_1I_1(t) - \mu_3u_2p_5R(t) + \mu_3b + \mu_4u_2p_5R(t),$$

$$\dot{\mu}_4 = -\frac{\partial H}{\partial R} = \mu_1p_1 - \mu_2p_4I_1(t) - \mu_3p_5u_2I_2(t) - p_1\mu_4 + \mu_4p_4I_1(t) + \mu_4u_2p_5I_2(t) + \mu_4b.$$

مراجع

1. R.M. Anderson, H.C. Jackson, R.M. May, et al., *Population dynamics of fox rabies in Europe*, Nature **289** (5800) (1981) 765–771.
2. D.J. Daley, D.G. Kendall, *Epidemics and rumours*, Nature **204** (4963) (1964) 1118–1118.
3. S.Y.T. Dong, F.H. Fan, Y.C. Huang, *Studies on the population dynamics of a rumor-spreading model in online social networks*, Physica A. **492** (2018) 10–20.
4. L. Zhu, M. Liu, Y. Li, *The dynamics analysis of a rumor propagation model in online social networks*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **520** (2019) 118–137.