



کنترل بهینه یک مدل SEIR برای انتشار شایعه در شبکه‌های اجتماعی آنلاین

محمد شیرازیان^{۱*}، زهرا جانسریان^۲، و زهرا عمارلو^۳

^{۱,۲,۳} گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه نیشابور

shirazian@neyshabur.ac.ir

z.janserian@neyshabur.ac.ir

z_emarloo@yahoo.com

چکیده. با توجه به توسعه روز افزون فناوری و افزایش کاربران شبکه‌های اجتماعی آنلاین، مسأله انتشار شایعات روز به روز فراگیرتر و مهم‌تر می‌شود. در این مقاله، یک مدل SEIR را برای انتشار شایعات در شبکه‌های اجتماعی آنلاین، مورد بررسی قرار می‌دهیم. در واقع، ابتدا یک مدل اصلاح شده انتشار شایعات را بر اساس مدل ارائه شده در [۴] پیشنهاد می‌کنیم. سپس به بررسی کنترل بهینه آن توسط اقدامات مداخله‌کننده مانند کنترل بستر ارتباطی، مداخله دولت، مدیریت و تقویت تفکر شخصی می‌پردازیم.

۱. مقدمه

شایعات عموماً به عنوان یک خبر تأیید نشده تعریف می‌شود که از طریق رسانه‌های مختلف مانند سایت‌های اینترنتی، تلفن همراه و غیره منتقل می‌شود. شایعات معمولاً وقایع یا مشکلاتی هستند که عموم مردم به آن علاقه‌مند هستند. در حالی که نمی‌توان درباره صحت آن‌ها قضاوت نمود. انتشار اطلاعات، شکل مهمی از تعامل اجتماعی است که روزانه افراد را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد. اگر شایعات کنترل نشود، تهدیدی برای زندگی عادی و حقوق اساسی افراد حتی ثبات اجتماعی می‌باشند. تئوری کلاسیک به طور عمده در دهه ۱۹۸۵ – ۱۹۶۵ متمرکز شد که به مدل‌هایی مانند مدل DK [۱، ۲] منجر شد. در سال‌های اخیر مدل‌های مختلفی برای انتشار شایعه ارائه شده است. به عنوان مثال در ۲۰۱۸، ژان به گسترش دینامیک شایعه در شبکه‌های پیچیده پرداخت [۳]. در ۲۰۱۹، ژو و همکاران [۴] یک مدل $SEIR$ به

شکل زیر، برای انتشار شایعه به همراه تجزیه و تحلیل آن ارائه کرده‌اند.

$$\frac{dS(t)}{dt} = bN(t) - dS(t) - \frac{\lambda S(t)I(t)}{N}, \quad (1.1)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\lambda S(t)I(t)}{N} - (\epsilon + d)E(t), \quad (2.1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = E(t)(\gamma + d)I(t), \quad (3.1)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - dR(t). \quad (4.1)$$

در این مقاله، مدل پیشنهادی ژو و همکاران را اصلاح کرده و به کنترل بهینه آن می‌پردازیم.

۲. مدل $SEIR$ اصلاح شده برای انتشار شایعه

معادله دیفرانسیل پیشنهادی اصلاح شده ما به فرم زیر می‌باشد:

$$\frac{dS(t)}{dt} = a - bS(t) - \lambda S(t)I(t),$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \lambda S(t)I(t) - \rho_2 R(t) - (\epsilon + b)E(t),$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \epsilon E(t) + \rho_1 I(t)R(t) - (\gamma + b)I(t),$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \rho_1 I(t)R(t) - bR(t) + \rho_2 R(t),$$

که در آن متغیرها به صورت زیر تعریف شده‌اند: $S(t)$: تعداد کاربران شبکه‌های اجتماعی آنلاین که ستون‌های خبری آن‌ها هنوز شایعه را در زمان t به موقع دریافت نکرده‌اند.

$I(t)$: تعداد کاربران شبکه‌های اجتماعی آنلاین که شایعه را در زمان t دریافت می‌کنند و می‌خوانند، باور می‌کنند و انتقال می‌دهند.

$E(t)$: تعداد کاربران آنلاین شبکه‌های اجتماعی که ستون‌های خبری آن‌ها شایعه را در زمان t دریافت کرده‌اند؛ اما هنوز به آن توجه نکرده‌اند.

$R(t)$: تعداد کاربران آنلاین شبکه‌های اجتماعی که در زمان t مدتی با این شایعه ارتباط برقرار کرده‌اند؛ اما به آن اعتقاد پیدا نکرده‌اند (بهبود پیدا کرده‌اند).

لم ۱.۲. جمعیت تعداد کل کاربران آنلاین شبکه به ازای هر $t \in [0, +\infty)$ کراندار می‌باشد.

برهان. با فرض $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ داریم:

$$\begin{aligned} N'(t) &= S'(t) + E'(t) + I'(t) + R'(t) \\ &= a - bN(t). \end{aligned}$$

با حل معادله فوق داریم:

$$N(t) = \frac{a}{b} + ce^{-bt},$$

□

که به ازای $t \in [0, +\infty)$ مقداری کراندار است.

نام پارامتر	توضیح
a	نرخ ثبت زمان واحد برای شبکه‌های اجتماعی آنلاین
b	نرخ غیر فعال کردن کاربر
γ	احتمال تبدیل جمعیت انتقال به جمعیت ایمن (R)
ε	احتمال تبدیل جمعیت به جمعیت انتقال
ρ_1	احتمال تماس کاربر انتقال و کاربر ایمن

جدول ۱: تعریف پارامترهای مدل

۳. مساله کنترل بهینه

در این بخش در مورد کنترل شایعات توسط اصل حداقل پونتریاگین بحث می‌کنیم. دو هدف را در نظر می‌گیریم. یکی به حداقل رساندن تعداد افراد ایمنی که در تماس با کاربران انتقال دهنده به یک کاربر انتقال دهنده تبدیل می‌شوند. دوم به حداقل رساندن هزینه‌های این مداخله که می‌تواند به صورت کنترل بستر ارتباطی، مداخله دولت، مدیریت و تقویت فکر شخصی باشد. بنابراین مساله کنترل بهینه زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \int_0^T (u^2(t) + I(t)) dt, \\
 \text{s.t.} \quad & \frac{dS(t)}{dt} = a - bS(t) - \lambda S(t)I(t), \\
 & \frac{dE(t)}{dt} = \lambda S(t)I(t) - \rho_2 R(t) - (\varepsilon + b)E(t), \\
 & \frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon E(t) + \rho_1(1 - u)I(t)R(t) - (\gamma + b)I(t), \\
 & \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \rho_1(1 - u)I(t)R(t) - bR(t) + \rho_2 R(t),
 \end{aligned}$$

که در آن، مجموعه کنترل قابل قبول عبارت است از:

$$U = \{u(t) \in L^2(0, T) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq u(t) \leq 1\}.$$

تابع هامیلتونی آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2}u^2 + I(t) + \mu_1(a - bS(t) - \lambda S(t)I(t) \\
 & + \mu_2(\lambda S(t)I(t) - \rho_2 R(t) - (\varepsilon + b)E(t) \\
 & + \mu_3(\varepsilon E(t) + \rho_1(1 - u)I(t)R(t) - (\gamma + b)I(t)) \\
 & + \mu_4(\gamma I(t) - \rho_1(1 - u)I(t)R(t) - bR(t) + \rho_2 R(t)
 \end{aligned}$$

در نتیجه، شرایط بهینگی به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u - \mu_3 \rho_1 I(t) R(t) + \mu_4 \rho_1 I(t) R(t) = 0.$$

$$u^* = \rho_1 I(t) R(t) (m u_3 - \mu_4).$$

$$\dot{\mu}_1 = -\frac{\partial H}{\partial S} = \mu_1 b + \mu_1 \lambda I(t) - \mu_2 \lambda I(t),$$

$$\dot{\mu}_2 = -\frac{\partial H}{\partial E} = \mu_2 (\varepsilon + b) - \mu_3 \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_3 = -\frac{\partial H}{\partial I} = & -1 + \mu_1 \lambda S(t) - \mu_2 \lambda S(t) \\ & - \mu_3 \rho_1 (1 - u) R(t) + \mu_3 (\gamma + b) - \mu_4 \gamma \\ & + \mu_4 \rho_1 (1 - u) R(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_4 = -\frac{\partial H}{\partial R} = & \mu_2 \rho_2 - \mu_3 \rho_1 (1 - u) I(t) \\ & + \mu_4 \rho_1 (1 - u) I(t) + \mu_4 b - \mu_4 \rho_2 \end{aligned}$$

با حل معادلات فوق، می توان تابع کنترل بهینه و حالت های بهینه را یافت.

مراجع

1. D.J. Daley, D.G. Kendall, *Epidemics and rumours*, Nature, **204(4963)** (1964) 1118–1118.
2. D.J. Daley, D.G. Kendall, *Stochastic rumours*, Ima Journal of Applied Mathematics, **1(1)** (1965) 42–55.
3. Y.L. Zan, *DSIR double-rumors spreading model in complex networks*, Chaos, Solitons & Fractals, **110** (2018) 191– 202.
4. L. Zhu, X. Zhou, and Y. Li, *Global dynamics analysis and control of a rumor spreading model in online social networks*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **526** (2019): 120903.