



کنترل سیستم‌های غیرخطی چندعامله با استفاده از نظریه اتلافی بودن

عرفان بهمنی^۱ و مهدی رحمانی^۱

^۱ گروه مهندسی برق-کنترل، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
mrahmani@eng.ikiu.ac.ir

چکیده. در این مقاله هدف اصلی طراحی کنترل کننده فیدبک حالت برای یک سیستم غیرخطی چند عامله است به طوری که سیستم حلقه بسته اتلافی باشد. فرض بر این است که هر سیستم از چند زیرسیستم تشکیل شده است که این زیرسیستم‌ها دارای دینامیک یکسان می‌باشند. هریک از این زیرسیستم‌ها روی هم‌دیگر اثر متقابل دارند. هر زیرسیستم از یک بخش خطی و یک بخش غیرخطی تشکیل شده است. شرایطی که نامساوی اتلافی را برآورده می‌کند، از طریق یک تابع ذخیره گسسته زمان و یک نرخ عرضه (Q, S, R) درجه دوم به دست می‌آید، سپس از طریق یک کنترل کننده فیدبک حالت شرط کافی برای اتلافی بودن سیستم حلقه بسته فراهم خواهد شد.

واژگان کلیدی: طراحی کنترل کننده، سیستم‌های غیرخطی، سیستم‌های چندعامله، اتلافی بودن

۱. پیش‌گفتار

سیستم‌های اتلافی یکی از موضوع‌های مورد علاقه در علم مهندسی و فیزیک است. اتلاف انرژی به دلیل ارتباط موثری که بین فیزیک، مهندسی کنترل و نظریه سیستم ایجاد می‌کند، یکی از پایه‌ای‌ترین مفاهیم در سیستم‌های دینامیکی است. امروزه سیستم‌های چندعاملی به دلیل کاربردهای وسیعی که در مدل‌سازی رفتار دسته‌جمعی حیوانات، آرایش هندسی هواپیماها، شبکه‌های حسگر، تجسس نظامی و ... دارند، بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته‌اند.

در [۱]، یک مساله داده - نمونه‌برداری شده (Q, S, R) اتلافی برای سیستم‌های خطی با استفاده از تکنیک نامساوی ماتریسی خطی، بررسی شده است. در [۲]، مساله کنترل فازی مبتنی بر اتلافی بودن برای سیستم‌هایی با دینامیک غیرخطی بررسی شده است. شرایط اتلافی بودن اکید که پایداری مجانبی را برای سیستم کنترل بهینه تضمین می‌کند، در [۳] آورده شده است. در [۴]، اهمیت اتلافی بودن برای اثبات پایداری مدل کنترل پیش‌بین تحت شرایطی که یک حالت مانا بهینه مدنظر باشد، ارزیابی شده است. در [۵]، مفهوم اتلافی بودن روی سیستم‌های پیشامد گسسته به وسیله جایگزین کردن مفهوم زمان با یک پیشامد پایه‌ای، اعمال شده است.

تعریف ۱.۱. اتلافی بودن برای سیستم‌های گسسته زمان: یک سیستم غیر خطی زمان گسسته به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), w(k)) \\ z(k) = h(x(k), u(k), w(k)) \end{cases} \quad (1.1)$$

سیستم دینامیکی زمان گسسته فوق را نسبت به نرخ عرضه $r(w(k), z(k))$ اتلافی می‌گوییم اگر یک تابع ذخیره مثبت معین $V(x(k)) \geq 0$ چنان وجود داشته باشد که رابطه زیر برقرار باشد:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq r(z(k), w(k)) \quad (۲.۱)$$

۲. دست‌آوردهای پژوهش

یک سیستم غیر خطی زمان گسسته که از N زیرسیستم تشکیل شده است را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = f_i(x_i(k), u_i(k), w_i(k)) \\ z_i(k) = h_i(x_i(k), u_i(k), w_i(k)) \end{cases} \quad (۱.۲)$$

جایی که $x_i(k) \in \mathcal{R}^{n_i}$ بردار حالت سیستم است، $z_i(k) \in \mathcal{R}^{m_i}$ خروجی سیستم و $u_i(k) \in \mathcal{R}^{q_i}$ ورودی کنترلی است. $w_i(k) \in \mathcal{R}^{l_i}$ اغتشاشی است که از خارج به سیستم وارد می‌شود. حال سیستم (۱.۲) را خطی‌سازی می‌کنیم.

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax_i(k) + Bu_i(k) + Mw_i(k) + \tilde{f}_i(x_i(k), u_i(k), w_i(k)) \\ z(k) = Cx_i(k) + Du_i(k) + Nw_i(k) + \tilde{h}_i(x_i(k), u_i(k), w_i(k)) \end{cases} \quad (۲.۲)$$

که هر یک از ماتریس‌های دینامیک سیستم به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$A_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0, u_i=0, w_i=0}, B_i = \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \Big|_{x_i=0, u_i=0, w_i=0}, M_i = \frac{\partial f_i}{\partial w_i} \Big|_{x_i=0, u_i=0, w_i=0},$$

$$C_i = \frac{\partial h_i}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0, u_i=0, w_i=0}, D_i = \frac{\partial h_i}{\partial u_i} \Big|_{x_i=0, u_i=0, w_i=0}, N_i = \frac{\partial h_i}{\partial w_i} \Big|_{x_i=0, u_i=0, w_i=0}$$

سیستم (۲.۲) را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Mw(k) + \tilde{f}(x(k), u(k), w(k)) \\ z(k) = Cx(k) + Du(k) + Nw(k) + \tilde{h}(x(k), u(k), w(k)) \end{cases} \quad (۳.۲)$$

که در آن داریم:

$$x^T = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_N^T], u^T = [u_1^T \ u_2^T \ \dots \ u_N^T], w^T = [w_1^T \ w_2^T \ \dots \ w_N^T]$$

و همچنین:

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_N), \quad A_1 = A_2 = \dots = A_N, \quad B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_N)$$

$$C = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_N), \quad C_1 = C_2 = \dots = C_N, \quad D = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_N)$$

$$M = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_N), \quad N = \text{diag}(N_1, N_2, \dots, N_N)$$

$$n_1 = n_2 = \dots = n_N, n = n_1 \cdot N, \quad q = \sum_{i=1}^N q_i, \quad m_1 = m_2 = \dots = m_N, m = m_1 \cdot N$$

بنابراین داریم:

$$x(k) \in R^n, \quad z(k) \in R^m, \quad u(k) \in R^q, \quad w(k) \in R^l,$$

هدف اصلی این مقاله اثبات ائتلافی بودن سیستم حلقه بسته به وسیله پیدا کردن یک قانون کنترلی فیدبک حالت به صورت $u(k) = Kx(k)$ است.

یک قانون کنترلی برای سیستم (۳.۲) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u = Kx, \quad K = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_N) \quad (۴.۲)$$

همانطور که می‌دانیم برای مدل‌سازی ارتباط بین عامل‌ها در یک سیستم چندعاملی از گراف‌ها استفاده می‌شود. ماتریس لاپلاسن (L)، ماتریسی است که با توجه به نحوه اتصال عامل‌ها به یکدیگر در یک سیستم چند عاملی تشکیل می‌شود ([۶]). و حال با علم به اینکه $\otimes$ ضرب کرونکر و L ماتریس لاپلاسن است، داریم:

$$L_c = L \otimes I_n \longrightarrow L_c.A = A.L_c \quad x_c = L_c.x, \quad z_c = L_c.z \quad (۵.۲)$$

حال با جایگذاری رابطه (۴.۲) در رابطه (۳.۲) و ضرب L_c در طرفین رابطه (۳.۲) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x_c(k+1) = (A + BK)x_c(k) + M_1w(k) + \tilde{f}_c(x(k), u(k), w(k)) \\ z_c(k) = (C + DK)x_c(k) + N_1w(k) + \tilde{h}_c(x(k), u(k), w(k)) \end{cases} \quad (۶.۲)$$

که در آن:

$$\tilde{f}_c = L_c.\tilde{f}, \quad \tilde{h}_c = L_c.\tilde{h}, \quad M_1 = L_c.M, \quad N_1 = L_c.N$$

به منظور برآورده کردن نامساوی ائتلافی، یک تابع مثبت معین $V(x_c(k))$ باید پیدا شود. بنابراین، یک ماتریس مثبت معین P و یک تابع ذخیره درجه دوم $V(x_c(k))$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$V(x_c(k)) = x_c^T(k)Px_c(k) \quad (۷.۲)$$

قضیه ۱.۲. با حل مساله بهینه سازی زیر، ماتریس‌های K (ضریب ثابت فیدبک حالت قانون کنترلی) و P (ماتریس مثبت معین تابع ذخیره) به گونه ای پیدا می‌شوند که سیستم حلقه بسته (۱.۲) ائتلافی باشد.

Find K, P

$$\text{subject to: } \Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & (A + BK)^T P & (C + DK)^T R \\ * & \delta_{22} & M_1^T P & -S - N_1^T R \\ * & * & -\alpha P & 0 \\ * & * & * & R \end{bmatrix} \leq 0 \quad (۸.۲)$$

$$(1 + \alpha)\tilde{f}^T \tilde{f} \leq x^T T x$$

$$P \leq \mu I$$

که در آن:

$$\delta_{11} = (A + BK)^T P(A + BK) - P + \mu T - (C + DK)^T R(C + DK)$$

$$\delta_{12} = (A + BK)^T P M_1 - (C + DK)^T S^T - (C + DK)^T R N_1$$

$$\delta_{22} = M_1^T P M_1 - Q - N_1^T R N_1 - 2S N_1$$

□

برهان. اگر $\Delta \leq 0$ باشد، نامساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} x_c^T & w^T & \tilde{f}_c^T & \tilde{h}_c^T \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} x_c \\ w \\ \tilde{f}_c \\ \tilde{h}_c \end{bmatrix} \leq 0$$

حال با بازکردن رابطه فوق و همچنین اضافه و کم نمودن عبارت $\tilde{f}_c^T P \tilde{f}_c$ به سمت چپ تساوی و نوشتن روابط داریم:

$$\begin{aligned} & \underbrace{((A+Bk)x_c + M_1w + \tilde{f}_c)^T P ((A+Bk)x_c + M_1w + \tilde{f}_c)}_{V(x_c(k+1))} - \underbrace{x_c^T P x_c}_{V(x_c(k))} \\ & \leq ((C+Dk)x_c + N_1w + \tilde{h}_c)^T R ((C+Dk)x_c + N_1w + \tilde{h}_c) - x_c^T \mu T x_c \\ & \quad + 2w^T S ((C+Dk)x_c + N_1w + \tilde{h}_c) + (1+\alpha) \tilde{f}_c^T P \tilde{f}_c + w^T Q w \end{aligned}$$

سمت چپ نامساوی بالا افزایش تابع ذخیره و سمت راست نامساوی نرخ عرضه نامساوی اتلافی را نشان می‌دهد. بنابراین، نامساوی اتلافی بالا می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$V(x_c(k+1)) - V(x_c(k)) \leq (w^T Q w + 2w^T S z_c + z_c^T R z_c) + (1+\alpha) \tilde{f}_c^T P \tilde{f}_c - x_c^T \mu T x_c \quad (۹.۲)$$

حال با در نظر گرفتن نامساوی $P \leq \mu I$ که در آن $\mu = \lambda_{\max}(P)$ و نامساوی $(1+\alpha) \tilde{f}^T \tilde{f} \leq x^T T x$ داریم:

$$(1+\alpha) \tilde{f}_c^T P \tilde{f}_c \leq x_c^T \mu T x_c \quad (۱۰.۲)$$

باید توجه شود که ماتریس T در نامساوی $x^T T x$ از طریق بهینه‌سازی مجموع مربعات که در [۷] آورده شده است، به دست می‌آید.

بنابراین رابطه زیر که بیانگر اتلافی بودن سیستم غیرخطی (۱۰۱) است، اثبات می‌شود.

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq (w^T Q w + 2w^T S z + z^T R z)$$

مراجع

1. Rathinasamy Sakthivel, Srimanta Santra, K Mathiyalagan, and S Marshal Anthoni. *Reliable dissipative sampled-data control for uncertain systems with actuator failures and application to vehicle dynamics*. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 1 (2017) 239–254.
2. Xiaojie Su, Yao Wen, Yong-Duan Song, and Tasawar Hayat. *Dissipativity-based fuzzy control of nonlinear systems via an event-triggered mechanism*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems 6 (2017) 1208–1217.
3. Vladimir Gaitsgory, Lars Grüne, Matthias Höger, Christopher M Kellett, and Steven R Weller. *Stabilization of strictly dissipative discrete time systems with discounted optimal control*. Automatica, (2018) 311–320.
4. Mario Zanon, Lars Grüne, and Moritz Diehl. *Periodic optimal control, dissipativity and mpc*. IEEE Transactions on Automatic Control, 6 (2017) 2943–2949.
5. Michael J. McCourt, Panos J. Antsaklis, *A notion of dissipativity for discrete event systems* 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), (2016) 889 – 894 .
6. C. Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, New York: Springer-Verlag, (2013)
7. Iman Nodozi , and Mehdi Rahmani. *LMI-based model predictive control for switched nonlinear systems*. Journal of Process Control, 59 (2017) 49–58.