



دستگاه‌های نامتناهی از معادلات انتگرال غیرخطی روی فضای فرشه $C(i_+^N, i^\infty)$

مهناز خانه‌گیر ، حجت اله امیری کیوانلو *

گروه ریاضی، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

چکیده: در این مقاله ابتدا یک اندازه نافرذگی روی فضای فرشه $C(i_+^N, i^\infty)$ معرفی می‌کنیم و سپس به کمک آن یک قضیه نقطه ثابت را بیان می‌نماییم. برای اعتبار و کاربرد قضایای پیشنهادیمان، با ارائه یک قضیه به وجود جواب یک دستگاه نامتناهی از معادلات انتگرالی غیرخطی از نوع ولترا می‌پردازیم. در انتها با ارائه مثالی کارایی و کاربرد این قضیه را نشان می‌دهیم.

1. پیش‌گفتار

اندازه‌های نافرذگی ابزارهای مفیدی در نظریه معادلات عملگری در معادلات تابعی که شامل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات انتگرال، معادلات انتگرالی دیفرانسیلی و نظریه کنترل بهینه می‌باشند، مورد استفاده قرار می‌گیرند. اندازه‌های نافرذگی و قضیه نقطه ثابت داربو نقش مهمی را در نظریه نقطه ثابت و کاربردهای آن ایفا می‌کنند. اولین اندازه نافرذگی توسط کاراتووسکی [3] در سال 1930 تعریف و مورد مطالعه قرار داده شد. در سال 1955 داربو با کمک اندازه نافرذگی قضیه ای را ارائه نمود که وجود نقاط ثابت را در عملگرهای تراکمی تضمین می‌کرد [2].

۲. نمادگذاری و مطالب پایه‌ای

در این بخش، بعضی از مفاهیم و نمادهای مورد نیاز بخش‌های بعدی را بیان می‌نماییم. فرض کنید $(E, ||.||)$ یک فضای باناخ حقیقی باشد، برای $\emptyset \neq X \subset E$ ، مجموعه $\bar{X}$ و $ConvX$ را به ترتیب بستار و غلاف محدب X می‌نامیم.

علاوه بر این، M_E را خانواده‌ی همه زیرمجموعه‌های ناتهی و کران دار E و N_E را زیرخانواده شامل همه زیرمجموعه‌های به طور نسبی فشرده E در نظر می‌گیریم.

1-2 تعریف [1]. نگاشت $\mu: M_E \rightarrow i_+$ را اندازه نافرذگی در E نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

(۱) خانواده $\ker m = \{X \in M_E : m(X) = 0\}$ ناتهی باشد و $\ker m \subseteq N_E$ ،

(۲) اگر $X \subset Y$ آنگاه $m(X) \leq m(Y)$ ،

(۳) $m(\bar{X}) = m(X)$ ،

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی: اندازه‌های نافرذگی، فضای فرشه، قضیه نقطه ثابت داربو ، دستگاه نامتناهی از معادلات انتگرالی ولترا.

* مهناز خانه‌گیر

$$, m(ConvX) = m(X) \quad (۴)$$

$$, m(lX + (1-l)Y) \leq lm(X) + (1-l)m(Y) \text{ باشد } l \in [0,1] \text{ هر } (۵)$$

$$(۶) \text{ اگر } \{X_n\} \text{ دنباله ای از مجموعه های بسته از } M_E \text{ باشد به طوری که برای هر } n=1,2,L \text{ و } X_{n+1} \subset X_n$$

$$.X_{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset \text{ آنگاه } \lim_{n \rightarrow \infty} m(X_n) = 0$$

همچنین m را اندازه نافشرده گی منظم می نامیم هرگاه علاوه بر شرایط (1) الی (۶) داشته باشیم

$$, m(X \cup Y) = \max\{m(X), m(Y)\} \quad (7)$$

$$, m(X + Y) \leq m(X) + m(Y) \quad (8)$$

$$(9) \text{ به ازای هر } \lambda \in \mathbb{R} \text{ داشته باشیم } m(\lambda X) = |\lambda| m(X)$$

$$. \ker m = N_E \quad (10)$$

2-2 تعریف. فرض کنید X یک زیرمجموعه ی ناتهی و کراندار از $C([0,T]^N)$ باشد. در این صورت برای هر $x \in X$ و هر $e > 0$ تعریف می کنیم

$$\omega_0^T(x, e) = \sup\{|x(t) - x(s)|, t, s \in [0, T]^N, \max\{|t_i - s_i|, i=1, 2, \dots, N\} \leq e\},$$

$$\text{که در آن } t = (t_1, t_2, \dots, t_N), s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$$

$$\omega_0^T(X, e) = \sup\{\omega_0^T(x, e), x \in X\},$$

$$\omega_0^T(X) = \lim_{e \rightarrow 0^+} \omega_0^T(X, e).$$

در این صورت تابع $\omega_0^T(X)$ یک اندازه نافشرده گی منظم در فضای $C([0,T]^N)$ می باشد.

$$3-2 \text{ یادآوری [4]}. \text{ فرض کنید } i^{\infty} \text{ به متر } i^{\infty} \text{ مجهز شده باشد که در آن } d_{i^{\infty}}(a, b) = \sup\{\frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{(1 + |a_i - b_i|)} : i \in \mathbb{N}\}$$

$$. p_i(a) = a_i \text{ قرار می دهیم } a = (a_i) \in i^{\infty} \text{ برای هر } i^{\infty} \text{ فضای } i^{\infty} \text{ یک فضای فرشه است. } a = (a_i), b = (b_i) \in i^{\infty}$$

۳. نتایج اصلی

فرض کنید $C(i_+^N, i^{\infty})$ فضای تمام توابع پیوسته تعریف شده روی i_+^N با مقادیری در i^{∞} باشند. این فضا مجهز به خانواده ای از نیم نرمها به صورت زیر است.

$$|x|^T = \sup\{|p_i(x)(t)| : i \leq T, t \in [0, T]^N\},$$

$$d_c(x, y) = \sup\{\frac{1}{2^T} \frac{|x - y|^T}{(1 + |x - y|^T)} : T \in \mathbb{N}\} \text{ وقتی } T \in \mathbb{N} \text{ همچنین این فضا با متر تعریف شده به صورت}$$

$$\text{وقتی که } x, y \in C(i_+^N, i^{\infty}), \text{ یک فضای فرشه است.}$$

□

فضای فرشه $C(\mathbf{i}_+^N, \mathbf{i}^\infty)$

همگرایی و به طور نسبی فشردگی در $C(\mathbf{i}_+^N, \mathbf{i}^\infty)$ با شرایط زیر مشخص سازی می شوند.

(1) دنباله (x_n) همگرا به x در $C(\mathbf{i}_+^N, \mathbf{i}^\infty)$ می باشد اگر و فقط اگر برای هر $i \in \mathbb{N}$ و هر $T > 0$ $p_i(x_n) \rightarrow p_i(x)$ به طور یکنواخت همگرا به $p_i(x)$ روی $[0, T]^N$ باشد.

(2) زیرمجموعه $X \subset C(\mathbf{i}_+^N, \mathbf{i}^\infty)$ به طور نسبی فشرده است اگر و فقط اگر برای هر $i \in \mathbb{N}$ و هر $T > 0$ مجموعه توابع $p_i(X)$ همپیوسته و به طور یکنواخت کراندار روی $[0, T]^N$ باشد.

همچنین برای هر $T > 0$ داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{C_T}(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_C(x_n, x) = 0$.

3-1 تعریف. زیرمجموعه Y ناتهی $\mathbf{i}^\infty$ کراندار نامیده می شود اگر برای هر $i = 1, 2, \dots$

$$\sup\{|p_i(z)| : z \in Y\} < \infty.$$

زیرمجموعه Y از $\mathbf{i}_+^N \times \mathbf{i}^\infty$ کراندار نامیده می شود اگر Y مشمول در مجموعه ای به فرم $[0, T]^N \times Z$ باشد که $T > 0$ و Z در $\mathbf{i}^\infty$ کراندار است. زیرمجموعه Y ناتهی $C(\mathbf{i}_+^N, \mathbf{i}^\infty)$ کراندار نامیده می شود اگر برای هر $i \in \mathbb{N}$ و هر $T > 0$ ، مجموعه توابع $p_i(Y)$ به طور یکنواخت کراندار روی $[0, T]^N$ باشد، یعنی

$$\sup\{|p_i(x)(t)| : t = (t_1, \dots, t_N) \in [0, T]^N, x \in Y\} < \infty.$$

در ادامه اندازه نافشردگی منظم $\mathfrak{W}$ در فضای $C(\mathbf{i}_+^N, \mathbf{i}^\infty)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم. برای این منظور فرض کنید $p_i : \mathbf{i}_+^N \rightarrow (0, \infty)$ دنباله ای از توابع باشد. برای هر $X \in M_{C(\mathbf{i}_+^N, \mathbf{i}^\infty)}$ قرار می دهیم

$$\mathfrak{W}_0^T(X) = \sup\{p_i(T, \dots, T) \mathfrak{W}_0^T(p_i(X)) : i \in \mathbb{N}\}, \quad \mathfrak{W}_0(X) = \sup\{\mathfrak{W}_0^T(X) : T > 0\}.$$

3-2 قضیه. فرض کنید Q یک زیرمجموعه Y ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای $C(\mathbf{i}_+^N, \mathbf{i}^\infty)$ باشد و $\mathfrak{W}_0(Q) < \infty$. همچنین فرض کنید $F : Q \rightarrow Q$ یک نگاشت پیوسته باشد و عدد ثابت $q \in [0, 1]$ موجود باشد به طوری که برای هر زیرمجموعه Y ناتهی X از Q داشته باشیم $\mathfrak{W}_0(FX) \leq q \mathfrak{W}_0(X)$. در این صورت F یک نقطه ثابت در مجموعه Q دارد.

3-3 قضیه. فرض کنید فرضیات زیر برقرار باشد.

(1) تابع $\Lambda : \mathbf{i}_+^N \rightarrow M_{\mathbf{i}_+^N}$ پیوسته است و برای هر $T > 0$ مجموعه $\bigcup_{t \in [0, T]^N} \Lambda(t)$ کراندار است.

(2) برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، نگاشت $f_i : \mathbf{i}_+^N \times \mathbf{i} \times \mathbf{i} \rightarrow \mathbf{i}$ پیوسته است و برای هر $T > 0$ خانواده توابع $\{f_i(t, y, z) : (y, z) \in B_1 \times B_2\}$ زیرمجموعه های کرانداری از $\mathbf{i}$ هستند روی $-N$ حجه های $[0, T]^N$ همپیوسته است. به علاوه توابع نامنفی $a_i, b_i : \mathbf{i}_+^N \rightarrow \mathbf{i}_+$ وجود دارند به طوری که برای هر $v, w, y, z \in \mathbf{i}$ و $t \in [0, T]^N$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$|f_i(t, y, z) - f_i(t, v, w)| \leq a_i(t) |y - v| + b_i(t) |z - w|.$$

(3) برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، نگاشت $g_i : \mathbb{I}_+^N \times \mathbb{I}_+^\infty \rightarrow \mathbb{I}_+$ پیوسته است و برای هر $T > 0$ ، خانواده توابع $\{g_i(t, u)\}_{t \in [0, T]^N}$ روی زیرمجموعه ی کراندار $Z \subseteq \mathbb{I}_+^\infty$ همپیوسته است. به علاوه برای هر $i \in \mathbb{N}$ تابع $d_i : \mathbb{I}_+^N \rightarrow \mathbb{I}_+$ وجود دارد به طوری که برای هر $t \in \mathbb{I}_+^N$ و هر $u_i, v_i \in \mathbb{I}_+^\infty$ رابطه زیر برقرار است.

$$|g_i(t, u_1, u_2, \dots) - g_i(t, v_1, v_2, \dots)| \leq d_i(t) |u_i - v_i|.$$

(4) برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، نگاشت $h_i : \mathbb{I}_+^N \times \bigcup_{t \in \mathbb{I}_+^N} \Lambda(t) \times \mathbb{I}_+^\infty \rightarrow \mathbb{I}_+$ پیوسته است. فرض کنید Z زیر مجموعه کراندار دلخواهی از $\mathbb{I}_+^\infty$ باشد. همچنین فرض کنید برای هر $i \in \mathbb{N}$ و هر $T > 0$ ، خانواده توابع $\{h_i(t, y, u)\}_{(y, u) \in \bigcup_{t \in \mathbb{I}_+^N} \Lambda(t) \times Z}$ روی $-N$ حبره های $[0, T]^N$ همپیوسته و خانواده توابع $\{h_i(t, y, u)\}_{(t, y) \in \mathbb{I}_+^N \times \bigcup_{t \in \mathbb{I}_+^N} \Lambda(t)}$ روی Z همپیوسته باشند. به علاوه تابع پیوسته $c_i : \mathbb{I}_+^N \rightarrow \mathbb{I}_+$ ($i \in \mathbb{N}$) وجود دارد به طوری که

$$\left| \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots) dy \right| \leq c_i(t),$$

که در آن $\xi : \bigcup_{t \in \mathbb{I}_+^N} \Lambda(t) \rightarrow \mathbb{I}_+^N$ و $t \in \mathbb{I}_+^N$ تابعی پیوسته است.

(5) برای هر $t \in \mathbb{I}_+^N$ و هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $a_i(t) d_i(t) < 1$.

در این صورت سیستم نامتناهی معادلات انتگرال

$$u_i(t) = f_i(t, g_i(t, u_1(t), u_2(t), \dots), \int_{\Lambda(t)} h_i(t, y, u_1(\xi(y)), u_2(\xi(y)), \dots) dy)$$

دارای حداقل یک جواب در فضای $C(\mathbb{I}_+^N, \mathbb{I}_+^\infty)$ است.

مثال 3-4. دستگاه نامتناهی معادله انتگرالی زیر را در نظر بگیرید.

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(t+7)j^5} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(u_i(t))}{\sqrt{5}(2j-1)^2} \right) + \int_t^{t^2+7} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(t+y)\cos(u_i(y))}{3j(j+1)} dy.$$

دستگاه معادله انتگرالی فوق حالت خاصی از معادله انتگرالی قضیه است و دارای حداقل یک جواب در فضای $C(\mathbb{I}_+, \mathbb{I}_+^\infty)$ است.

مراجع

1. J. Banas and K. Goebel, Measures of noncompactness in Banach spaces, *Lecture Notes in Pure and Applied Math.* vol. 60, Dekker, New York, 1980
2. G. Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, *Rend. Sem. Mat. Uni. Padova*. **24** (1955) 84-92.
3. K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, *Fund. Math.* **15** (1930) 301-309.
4. L. Olszowy, *Solvability of infinite systems of singular integral equations in Frechet space of continuous functions*, *Comput. Math. Appl.*, **59** (2010) 2794-2801.