



آنتروپی یکنواختی سیستم تکرار تابع

اعظم اردوئی^۱ * و سید علیرضا احمدی^۲

^{۱,۲} دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
sa.ahmadi@math.usb.ac.ir
azam.ordooji@gmail.com

چکیده. در این مقاله برخی خواص آنتروپی یکنواختی عمل گروهی از توابع پیوسته روی فضاها را اثبات می‌کنیم.

۱. پیش‌گفتار

آنتروپی توپولوژیکی یکی از مفاهیم مهم در سیستمهای دینامیکی میباشد. [۲] اگر فضای توپولوژیک مورد نظر به یک یکنواختی مجهز باشد، این کمیت با آنتروپی یکنواخت یکسان میشود. یک فضای یکنواختی، مجموعه‌ای با یک ساختار یکنواختی تعریف شده روی آن می‌باشد. ساختار یکنواختی $\mathcal{U}$ روی یک فضای X توسط زیرمجموعه‌هایی از حاصلضرب $X \times X$ تعریف می‌شود که خانواده $\mathcal{U}$ دارای شرایطی است که در ادامه شرح داده می‌شود: (۱) برای هر $E_1, E_2 \in \mathcal{U}$ اشتراک E_1, E_2 نیز عضوی از $\mathcal{U}$ می‌باشد، و اگر $E_1 \in \mathcal{U}$ و $E_1 \subset E_2$ و $E_2 \in \mathcal{U}$ آنگاه $E_2 \in \mathcal{U}$ (۲) هر مجموعه $E \in \mathcal{U}$ شامل قطر $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$ می‌باشد، (۳) اگر $E \in \mathcal{U}$ آنگاه $E^T = \{(y, x) : (x, y) \in E\}$ (۴) برای هر $E \in \mathcal{U}$ مجموعه $\hat{E} \in \mathcal{U}$ موجود است بطوریکه $\hat{E} \circ \hat{E} \subset E$

$$\hat{E} \circ \hat{E} = \{(x, y) : \exists z \in X : (x, z) \in \hat{E}, (z, y) \in \hat{E}\}.$$

اعضای $\mathcal{U}$ را دربرگیرنده قطر یا به اختصار دربرگیرنده می‌نامیم، $E[x] = \{y \in X : (x, y) \in E\}$ مقطع عرضی از E در نقطه $x \in X$ نامیده می‌شود و دربرگیرنده E متقارن گفته می‌شود، اگر $E = E^T$. برای یک سیستم دینامیکی (X, f) نگاشت حاصلضرب $F = f \times f$ را روی $X \times X$ مورد استفاده قرار می‌دهیم. فرض کنید $f : X \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته یکنواختی $(X, \mathcal{U})$ و $K \in \mathcal{K}(X)$ که در آن $\mathcal{K}(X)$ خانواده همه زیرمجموعه‌های فشرده از X می‌باشد. دربرگیرنده $E \in \mathcal{U}$ و $n \in \mathbb{N}$ را در نظر بگیرید، زیرمجموعه $A \subseteq K$ یک مجموعه (n, E, f) -پوشاننده برای K می‌نامیم، اگر

$$K \subseteq \bigcup_{x \in A} \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} F^{-i}(E) \right) [x].$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. آنتروپی توپولوژیکی، آنتروپی یکنواختی، سیستم تکرار تابع، سیستم دینامیکی، فضای یکنواختی.
* سخنران

زیرمجموعه $A \subseteq K$ یک مجموعه (n, E, f) -جداشونده گوییم، اگر

$$A \times A \cap (X \times X \setminus \Delta) \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} F^{-i}(X \times X \setminus E).$$

قضیه ۱.۱. [۱] فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای یکنواختی و $f : X \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته یکنواخت باشد، اگر U و V دربرگیرنده‌هایی از $\mathcal{U}$ با $U \subset V$ باشند، برای هر $K \in \mathcal{K}(X)$ و هر $n \geq 0$ بدست می‌آوریم:

$$: \text{sep}(n, V, K, f) \leq \text{sep}(n, U, K, f) \quad (۱)$$

$$: \text{span}(n, V, K, f) \leq \text{span}(n, U, K, f) \quad (۲)$$

$$. \text{span}(n, V, K, f) \leq \text{sep}(n, U, K, f) \quad (۳)$$

[۱] $U \in \mathcal{U}$ را در نظر بگیرید، تعریف می‌کنیم

$$\text{span}(U, K, f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} 1/n \log \text{span}(n, U, K, f);$$

$$\text{sep}(U, K, f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} 1/n \log \text{sep}(n, U, K, f).$$

آنگاه موارد زیر را برای نگاشت پیوسته یکنواخت تعریف می‌کنیم

$$h_{\text{span}}(f, K) = \sup\{\text{span}(U, K, f) : U \in \mathcal{U}\};$$

$$h_{\text{span}}(f) = \sup\{h_{\text{span}}(f, K) : K \in \mathcal{K}(X)\};$$

$$h_{\text{sep}}(f, K) = \sup\{\text{sep}(U, K, f) : U \in \mathcal{U}\};$$

$$h_{\text{sep}}(f) = \sup\{h_{\text{sep}}(f, K) : K \in \mathcal{K}(X)\}.$$

قضیه ۲.۱. فرض کنید $f : X \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته یکنواخت روی فضای یکنواختی $(X, \mathcal{U})$ باشد، آنگاه $h_{\text{span}}(f) = h_{\text{sep}}(f)$.

این مفهوم آنتروپی یکنواختی را به ما می‌دهد:

$$h_u(f) = h_{\text{span}}(f) = h_{\text{sep}}(f)$$

۲. آنتروپی توپولوژیکی عمل نیم گروه

طبق تعریف اولیه آنتروپی توپولوژی اگر X یک فضای توپولوژیک فشرده و $f : X \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته باشد به طوری که $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ مجزا از X باشند که در آن $k \geq 1$ یک عدد صحیح باشد و x_i ها که در آن $x \in X$ با فاصله مثبت از یکدیگر قرار داشته باشند در این صورت آنتروپی نگاشت f به صورت زیر بیان می‌شود

$$h(f) = \max(h(f|_{x_i}))$$

فرض کنیم F_m^+ مجموعه‌ای از همه ی کلمات متناهی از نمادهای $0, 1, \dots, m-1$ باشد برای هر $w \in F_m^+$ ، طول w را با $|w|$ نشان می‌دهند که نشان‌دهنده‌ی تعداد نمادها در w است.

اگر $w, w' \in F_m^+$ باشد. فرض می‌کنیم w, w' را به طوری که w' در سمت راست w قرار می‌گیرد و با توجه به قانون ترکیب F_m^+ یک نیم گروه با مولدهای m است. و همچنین می‌نویسیم $w \leq w'$ اگر وجود داشته باشد w'' به طوری که $w' = w''w$.

اگر $w \in F_m^+$ و $w = w_1 w_2 \dots w_k$ باشد به طوری که برای هر $i = 0, 1, 2, \dots, k$

$$w_i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

و فرض می‌کنیم $f_w = f_{w_1} f_{w_2} \dots f_{w_k}$ بدیهی است برای هر $w' \in F_m^+$ داریم

$$f_{ww'} = f_w \cdot f_{w'}$$

تعریف ۱.۲. مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های نامتناهی دوطرفه از نمادهای $0, 1, \dots, m-1$ را با Σ_m نشان می‌دهیم به عبارت دیگر

$$\Sigma_m = \{\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots) \mid \omega_i = 0, 1, \dots, m-1\}$$

که در آن i یک عدد صحیح است.

در این صورت یک متر روی Σ_m به صورت زیر بیان می‌شود

$$d(\omega, \omega') = \frac{1}{2^k}$$

که در آن $k = \inf\{|n| : \omega_n \neq \omega'_n\}$.

می‌توان نشان داد که با توجه به این متر Σ_m فشرده است. شیفت برنولی $\sigma : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ یک همیومورفیزم از Σ_m به Σ_m که ضابطه آن به شکل زیر است

$$(\sigma_\omega w)_i = \omega_{i+1}$$

فرض کنید $\omega \in \Sigma_m$ و $\omega \in F_m^+$ و a و b صحیح باشند و $a \leq b$. می‌نویسیم $a \leq b$ می‌نویسیم $w|_{[a,b]} = w$ اگر $w = \omega_a \omega_{a+1} \dots \omega_{b-1} \omega_b$ بدیهی است اگر $w \leq w'$ آنگاه

$$(X, \mathcal{U}_w) \leq (X, \mathcal{U}_{w'})$$

فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای یکنواختی فشرده و $E \in \mathcal{U}$ یک اینتوریج باشد، زیرمجموعه F از X را یک مجموعه $(w, E, f_0, \dots, f_{m-1})$ -جداشونده از X می‌نامند اگر به ازای $x, y \in F$ که $x \neq y$ داشته باشیم $\cup_{w' \leq w} (f_{w'}, f_w) \not\subseteq E$ و بزرگترین کاردینال از مجموعه‌های $(w, E, f_0, \dots, f_{m-1})$ -جداشونده از X را با $sep(w, E, f_0, \dots, f_{m-1})$ نشان می‌دهند. چون X فشرده است، مجموعه $(w, E, f_0, \dots, f_{m-1})$ متناهی است.

یک زیرمجموعه G از X یک مجموعه‌ی $(w, E, f_0, \dots, f_{m-1})$ پوشاننده از X نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in X$ وجود داشته باشد $y \in G$ به طوری که $\cup_{w' \leq w} (f_{w'}, f_w) \subseteq E$ که این مجموعه نیز با توجه به فشردگی فضا، متناهی می‌باشد.

و کوچکترین کاردینال از مجموعه‌های $(w, E, f_0, \dots, f_{m-1})$ پوشاننده از X را با $span(w, E, f_0, \dots, f_{m-1})$ نشان می‌دهند.

طبق تعریف بوفتوف برای آنتروپی متریک، روابط زیر را برای آنتروپی یکنواختی بدست می‌آوریم

$$span(n, E, f_0, \dots, f_{m-1}) = \frac{1}{m^n} \sum_{|w|=n} span(w, E, f_0, \dots, f_{m-1})$$

$$sep(n, E, f_0, \dots, f_{m-1}) = \frac{1}{m^n} \sum_{|w|=n} sep(w, E, f_0, \dots, f_{m-1})$$

که در آن

$$\begin{aligned} \text{span}(E, f_0, \dots, f_{m-1}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{span}(n, E, f_0, \dots, f_{m-1}) \\ \text{sep}(E, f_0, \dots, f_{m-1}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{sep}(n, E, f_0, \dots, f_{m-1}) \end{aligned}$$

سرانجام آنتروپی یکنواختی عمل نیم‌گروه آزاد به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} h_{\text{span}}(f_0, \dots, f_{m-1}) &= \sup\{\text{span}(E, f_0, \dots, f_{m-1}) : E \in \mathcal{U}\} \\ h_{\text{sep}}(f_0, \dots, f_{m-1}) &= \sup\{\text{sep}(E, f_0, \dots, f_{m-1}) : E \in \mathcal{U}\} \end{aligned}$$

۱.۲. آنتروپی یکنواختی و برخی از ویژگی‌های آن. فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای یکنواختی باشد به طوری که لزوماً فشرده نباشد $f_0, \dots, f_{m-1}$ نگاشت‌هایی به طور یکنواخت پیوسته از X به X باشند. فرض کنید K یک زیرمجموعه فشرده از X باشد و برای هر $w \in F_m^+$ و $E \in \mathcal{U}$ یک زیرمجموعه $G \subseteq X$ را یک مجموعه $(w, E, K, f_0, \dots, f_{m-1})$ -پوشاننده از K می‌نامند اگر برای هر $x \in K$ وجود داشته باشد $y \in G$ به طوری که $\cup_{w' \leq w} (f_{w'}(x), f_w(y)) \subseteq E$.

کوچکترین کاردینال از مجموعه‌های $(w, E, K, f_0, \dots, f_{m-1})$ پوشاننده‌ی از K را با

$$\text{span}(w, E, K, f_0, \dots, f_{m-1})$$

نشان می‌دهند.

فرض کنید K یک زیرمجموعه فشرده از X باشد. برای هر $w \in F_m^+$ و $E, F \subseteq K$ را یک مجموعه $(w, E, K, f_0, \dots, f_{m-1})$ -جداشونده از K می‌نامند. اگر برای هر $x, y \in F$ به طوری که $x \neq y$ داشته باشیم $\cup_{w' \leq w} (f_{w'}(x), f_w(y)) \not\subseteq E$. بزرگترین کاردینال از مجموعه‌های $(w, E, K, f_0, \dots, f_{m-1})$ جداشونده از K را با $\text{sep}(w, E, K, f_0, \dots, f_{m-1})$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۲. فرض کنیم $(X, \mathcal{U})$ یک فضای یکنواختی و $E \in \mathcal{U}$ باشد که لزوماً X فشرده نیست و $f_0, \dots, f_{m-1}$ نگاشت‌هایی به طور یکنواخت پیوسته از X به X باشند و K یک زیرمجموعه فشرده از X باشد، روابط زیر برقرار هستند

$$\begin{aligned} h_{\text{span}}(f_0, \dots, f_{m-1}, K) &= \sup\{\text{span}(E, K, f_0, \dots, f_{m-1}) : E \in \mathcal{U}\} \\ h_{\text{sep}}(f_0, \dots, f_{m-1}, K) &= \sup\{\text{sep}(E, K, f_0, \dots, f_{m-1}) : E \in \mathcal{U}\} \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \text{span}(E, K, f_0, \dots, f_{m-1}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{span}(n, E, K, f_0, \dots, f_{m-1}) \\ \text{sep}(E, K, f_0, \dots, f_{m-1}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{sep}(n, E, K, f_0, \dots, f_{m-1}) \end{aligned}$$

حال تعریف می‌کنیم

$$h_{\mathcal{U}}(f_0, \dots, f_{m-1}, K) = h_{\text{span}}(f_0, \dots, f_{m-1}, K) = h_{\text{span}}(f_0, \dots, f_{m-1}, K).$$

همچنین برای نگاشت‌های پیوسته یکنواخت $f_0, \dots, f_{m-1}$ روابط زیر را داریم

$$h_{\text{span}}(f_0, \dots, f_{m-1}) = \sup\{\text{span}(f_0, \dots, f_{m-1}, K) : K \subset X \text{ فشرده}\},$$

$$h_{\text{sep}}(f_0, \dots, f_{m-1}) = \sup\{\text{sep}(f_0, \dots, f_{m-1}, K) : K \subset X \text{ فشرده}\},$$

بنابراین آنتروپی یکنواختی نیم‌گروه تولیدشده توسط مولدهای $f_0, \dots, f_{m-1}$ روی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h_{\mathcal{U}}(f_0, \dots, f_{m-1}) = h_{\text{span}}(f_0, \dots, f_{m-1}) = h_{\text{sep}}(f_0, \dots, f_{m-1}).$$

تذکره: می‌توان نشان داد که $h_{\mathcal{U}}(f_0, \dots, f_{m-1})$ کمتر یا مساوی آنتروپی یکنواختی از یک عمل نیم‌گروه آزاد تولیدشده $G_1 = \{id_X, f_0, \dots, f_{m-1}\}$ است که توسط وانگ تعریف شده است.

مثال ۳.۲. فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای یکنواختی باشد که لزوماً فشرده نیست و $f_0, \dots, f_{m-1}$ نگاشت‌هایی به طور یکنواخت پیوسته از X به X باشند. نیم‌گروه G با مولدهای $f_0, \dots, f_{m-1}$ در نظر می‌گیریم. اگر G خانواده‌ای هم‌پیوسته باشد آنگاه $h_{\mathcal{U}}(f_0, \dots, f_{m-1}) = 0$.

تعریف ۴.۲. فرض کنید X یک فضای یکنواختی باشد، $\mathcal{U}$ و $\mathcal{U}'$ دو یکنواختی روی X باشند. $id_X : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (X, \mathcal{U}')$ و $id_X : (X, \mathcal{U}') \rightarrow (X, \mathcal{U})$ نگاشت‌های هم‌ارز گویند که در آن نگاشت‌های $(X, \mathcal{U})$ بطور یکنواخت پیوسته باشند.

قضیه ۵.۲. فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای یکنواختی باشد و $f_0, \dots, f_{m-1}$ نگاشت‌های بطور یکنواخت پیوسته از X به X باشند اگر $\mathcal{U}$ و $\mathcal{U}'$ به طور یکنواخت هم‌ارز باشند آنگاه

$$h_{\mathcal{U}}(f_0, \dots, f_{m-1}) = h_{\mathcal{U}'}(f_0, \dots, f_{m-1}).$$

قضیه ۶.۲. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و $f_0, \dots, f_{m-1}$ نگاشت‌هایی به طور یکنواخت پیوسته روی X باشند. فرض کنیم $\delta > 0$. محاسبه کنید سوپریم $H(f_0, \dots, f_{m-1})$ از مجموعه‌های $H(f_0, \dots, f_{m-1})$ با قطر کمتر از δ .

قضیه ۷.۲. فرض کنید $(X_i, \mathcal{U}_i)$ ، $(i = 1, 2)$ فضای یکنواختی باشد و فرض کنید $\mathcal{F}^{(1)} = \{f_0^{(1)}, \dots, f_{m-1}^{(1)}\}$ یک مجموعه متناهی از نگاشت‌هایی به طور یکنواخت پیوسته روی X_1 باشد و $\mathcal{F}^{(2)} = \{f_0^{(2)}, \dots, f_{k-1}^{(2)}\}$ یک مجموعه متناهی از نگاشت‌هایی به طور یکنواخت پیوسته روی X_2 باشد. فرض کنید

$$\mathcal{F}^{(1)} \times \mathcal{F}^{(2)} = \{(f \times g)_0, \dots, (f \times g)_{mk-1}\}$$

که در آن

$$(f \times g)_i \in \{f \times g : f \in \mathcal{F}^{(1)}, g \in \mathcal{F}^{(2)}\}$$

و

$$(f \times g)(x_1, x_2) = (f(x_1), g(x_2)) \quad \forall f \times g \in \mathcal{F}^{(1)} \times \mathcal{F}^{(2)}, \quad x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$$

یکنواختی $\mathcal{U}$ روی فضای حاصلضربی $X_1 \times X_2$ یکنواختی تولید شده توسط عناصر پایه به صورت $U \times V$ می‌باشد که $U \in \mathcal{U}_1$ و $V \in \mathcal{U}_2$ در این صورت خواهیم داشت

$$h_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}^{(1)} \times \mathcal{F}^{(2)}) \leq h_{\mathcal{U}_1}(\mathcal{F}^{(1)}) + h_{\mathcal{U}_2}(\mathcal{F}^{(2)})$$

. چنانچه X_1 فشرده باشد و داشته باشیم

$$h_{\mathcal{U}_1}(\mathcal{F}^{(1)}) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N_{sep}(n, U, X_1, \mathcal{F}^{(1)})$$

. و چنانچه X_2 فشرده باشد و داشته باشیم

$$h_{\mathcal{U}_2}(\mathcal{F}^{(2)}) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N_{sep}(n, V, X_2, \mathcal{F}^{(2)})$$

دراین صورت خواهیم داشت

$$h_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}^{(1)} \times \mathcal{F}^{(2)}) = h_{\mathcal{U}_1}(\mathcal{F}^{(1)}) + h_{\mathcal{U}_2}(\mathcal{F}^{(2)})$$

مثال ۸.۲. فرض کنید

$$\begin{aligned} A_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & A_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x & x &\longmapsto 5x \end{aligned}$$

در نتیجه بدست می آوریم

$$h(A_1, A_2) = \log \frac{1}{2}(3 + 5) = 2 \log 2$$

مثال ۹.۲. فرض کنید A و B بروریختی های هایپربولیک روی $\mathbb{T}^2$ با ماتریس های به ترتیب

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

باشند آنگاه می توانیم به راحتی کران های آنتروپی $h(A, B)$ را بدست آوریم

$$\log \frac{9}{2} \leq h(A, B) \leq \log \left(\frac{19 + 3\sqrt{29}}{4} + 3 + \sqrt{5} \right)$$

مراجع

1. S.A. Ahmadi, X. Wu, Z. Feng, X. Ma, and T. Lu, On the entropy points and shadowing in uniform 329 spaces, Int. J. Bifurcation and Chaos 28 (2018), 1850155.
2. Y.Wang, D.Ma, On the topological entropy of a semigroup of continuous maps, J. Math. Anal. Appl. 427(2015)1084–1100