

مدل‌سازی مساله تعقیب و گریز و مسیرهای بهینه زمانی

سید مهدی کاظمی تربقان^{۱*}، مرتضی میرمحمدرضایی^۲

^۱ استادیار گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد

m.kazemi@ub.ac.ir

^۲ دانشیار گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

mmreza@aut.ac.ir

چکیده: در این مقاله با استفاده از مترهای فینسلری، مسیرهای بهینه زمانی در مساله تعقیب و گریز مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این راستا با استفاده از تکنیک‌های هندسه فینسلری، مسیرهای بهینه زمانی در مساله تعقیب و گریز به صورت معکوس و با استفاده از روش اکوبو حل شده و یکی از دقیق‌ترین جواب‌ها برای این نوع مسائل ارائه می‌گردد. در نهایت نیز با استفاده از برنامه میپل مسیرهای بهینه در یک مساله تعقیب و گریز، مدل‌سازی و سپس شبیه‌سازی می‌گردند.

۱. پیش‌گفتار

هندسه فینسلری توسیعی طبیعی از هندسه ریمانی است. از آن‌جا که متریک فینسلری علاوه بر مکان، به جهت نیز وابسته است، بنابراین مدل درخوری برای پژوهش در حوزه‌های مختلف علوم به‌خصوص بهینه‌سازی و کنترل است. از اولین ریاضی‌دانانی که به مطالعه بر روی منیفلدهای فینسلری پرداختند می‌توان به جی اف بی ریمان اشاره کرد. اما او بر این باور بود که مطالعه و پژوهش در راستای کارهای گاوس با توجه به متریکی که بعدها به متریک ریمان معروف شد، مناسب‌تر است. لذا به مطالعات خود در این زمینه ادامه نداد. با توجه به اهمیت این منیفلدها در بهینه‌سازی، پژوهش در این زمینه توسط محققان دیگر ادامه یافت، تا آن‌که در سال ۱۹۱۸ پل فینسلر تعریف مدونی از متریک فینسلری با توجه به نتایج به‌دست آمده توسط استاد خود کنستانتین کاراتئودوری ارائه نمود. پس از آن نظریه مترهای فینسلری در حوزه بهینه‌سازی و کنترل توسط چرن، بروالد و کارتان گسترش چشمگیری پیدا کرد، به‌طوری‌که هریک التصاقی را به‌شکل موضعی به‌عنوان تعمیمی از التصاق ریمانی و با توجه به نیازهای خود در حل مسائل بهینه‌سازی معرفی نمودند و موجب تحولی در این زمینه تحقیقاتی شدند، [۱، ۴، ۶].

در مسائل مرتبط با بهینه‌سازی هدف آن است که یک گزینه از بین همه گزینه‌ها به عنوان بهترین گزینه انتخاب شود. حال اگر انتخاب‌های ما مسیرهای متفاوت باشند در اینصورت مسیرهای بهینه همان کوتاهترین مسیرها هستند. یکی از کارکردهای هندسه فینسلری، پیدا کردن همین خطوط بهینه در شرایط متفاوت است. این خطوط بهینه در هندسه فینسلری تحت عنوان ژئودزیک شناخته می‌شوند. امروزه از ژئودزیک‌ها در حل مسائل پیچیده بهینه‌سازی بسیار استفاده می‌گردد، [۲، ۳، ۵، ۷].

اهمیت هندسه فینسلری برای حل مسائل بهینه‌سازی و کنترل بخصوص در حوزه ناوبری، از آنجا ناشی می‌شود که مسیرهای بهینه به طور طبیعی و از راه حل مساله به صورت معکوس بدست می‌آید و در نتیجه یک حل کامل برای این نوع مسائل است. با توجه به تکنیک اکوبو و قضیه وجودی ژئودزیک‌ها در هندسه فینسلری، این مسیرها قطعاً مسیرهای بهینه هستند. با ارائه مثال زیر اهمیت هندسه‌های مختلف را در پیدا کردن ژئودزیک‌ها یا همان کوتاهترین مسیرها بررسی می‌کنیم.

فرض کنید یک کشتی جنگی از بندر عباس به سمت یکی از بنادر جنوبی خلیج فارس در حال حرکت باشد در اینصورت با استفاده از هندسه اقلیدسی می‌دانیم که کوتاهترین مسیر بین این دو بندر خطی راست است که این دو بندر را بهم وصل می‌کند ولی با توجه به کروی بودن کره زمین حرکت در راستای این مسیر برای کشتی میسر نمی‌باشد. در اینجا با استفاده از هندسه ریمانی می‌توان ثابت کرد که مسیر بهینه کشتی برای تردد بین این دو بندر قسمتی از دایره عظیمه روی کره زمین است که این دو بندر را بهم وصل کند. حال شرایطی را در نظر بگیرید که بادی غیر موافق جهت حرکت کشتی شروع به وزیدن کند در اینصورت حرکت روی دایره عظیمه به دلیل نیروی باد موجب نمی‌شود که کشتی در کوتاهترین زمان ممکن بین این دو بندر تردد کند. در این صورت ژئودزیک‌های حاصل از مترهای فینسلری این امکان را به وجود می‌آورند تا مسیرهای بهینه زمان بدست آیند. این مساله تحت عنوان مساله ناوبری زرمولو در منابع هندسه فینسلری مطرح است، [۱،۳،۷].

مساله ناوبری زرمولو ابتدا توسط پژوهشگران با در نظر گرفتن سطح دریا به صورت یک رویه در فضای اقلیدسی سه بعدی همراه با تکنیک‌های بهینه‌سازی و هندسه گسسته مورد بررسی قرار گرفت ولی نتایج بدست آمده رضایت بخش نبود. تا اینکه در سال ۲۰۰۴ پروفیسور زهانگمین شن مقاله‌ای در این زمینه منتشر کرد که با استفاده از تکنیک‌های هندسه فینسلری این مساله را به لحاظ عملی به شکل قابل قبولی حل نمود، [۶].

شن ابتدا دریا را به عنوان یک منیفلد ریمانی دلخواه (M, g) در نظر گرفت که g متر ریمانی روی آن است. او در مطالعات خود به این نتیجه رسید که وقتی باد با سرعت یکسان شروع به وزیدن می‌کند (سرعت باد به زمان وابسته نیست) قایق برای اینکه در کوتاهترین زمان ممکن از بندر p به بندر q برسد بایستی مسیر ژئودزیک‌های یک متر فینسلری تحت عنوان متر راندزی را انتخاب کند. شن همچنین در مطالعات خود نشان داد که هر متر راندزی از یک مساله ناوبری روی یک منیفلد ریمانی بدست می‌آید. بنابراین مطالعه خواص هندسی مترهای راندزی یک روش مطلوب جهت حل مسائل ناوبری زرمولو می‌باشد.

در این راستا در این مقاله با استفاده از تکنیک‌های شن در مقاله‌های [۲،۴،۵،۷] مسیرهای بهینه در مساله ناوبری زرمولو مورد مطالعه قرار می‌گیرند و سپس با استفاده از نتایج بدست آمده، یک مساله تعقیب و گریز را مدل‌سازی و سپس شبیه‌سازی می‌کنیم که در ذیل به آن می‌پردازیم.

۲. دست‌آوردهای پژوهش

جهت پیدا کردن مسیرهای بهینه زمانی در مساله تعقیب و گریز با استفاده از تکنیک‌های هندسه فینسلری، ابتدا بایستی مساله به صورت معکوس و با استفاده از تکنیک اکوبو حل شود که این منجر به یافتن یکی از دقیق ترین جواب‌ها برای این گونه مسائل می‌شود. در نهایت با توجه به نتایج بدست آمده و استفاده از برنامه میپل، یک مثال کاربردی از مساله تعقیب و گریز مدل‌سازی و شبیه‌سازی شود. به دلیل حجم بالای محاسبات در این جا از ذکر جزئیات صرف نظر می‌شود و تنها مدل‌سازی و شبیه‌سازی مسیرهای بهینه در مساله تعقیب و گریز با استفاده از تکنیک‌های هندسه فینسلری بیان می‌گردد.

فرض کنید یک شی پرنده در حال پرواز بر فراز یک منطقه جغرافیایی جنگی است به طوریکه در آن منطقه جغرافیایی تعدادی دلخواه ایستگاه موجود باشد که به محض ورود شیء پرنده به منطقه مذکور شروع به شلیک به سمت شیء مذکور می‌کنند. در اینصورت مساله به اینصورت تعریف می‌شود که اگر شیء پرنده و شلیک کننده‌ها به یک اندازه باهوش باشند (به این معنی که شلیک کننده‌ها و شیء پرنده و تکنولوژی که در اختیار دارند به گونه‌ای باشد که این امکان را ایجاد کند که با توجه به شرایط توپوگرافی منطقه اعم از باد، رطوبت و شرایط جغرافیایی منطقه، گلوله‌های شلیک شده بتوانند در مسیری حرکت کنند که در کمترین زمان ممکن به هدف برخورد نمایند و شیء پرنده نیز بتواند مسیری را انتخاب کند که در کمترین زمان ممکن به نقطه هدف خود برسد) در اینصورت شیء پرنده بایستی چه مسیری را انتخاب نماید تا در کمترین زمان ممکن بدون آنکه با گلوله‌ها برخورد نماید به مقصد برسد؟ در این مقاله، این مساله را به کمک تکنیک‌های ارائه شده در هندسه فینسلری حل و سپس مدل‌سازی نموده و در نهایت به کمک برنامه میپل شبیه‌سازی می‌کنیم.

از دیدگاه یک فرد ناظر یک شیء پرنده برای رسیدن به مقصد خود مانند نقطه q وارد یک منطقه جنگی می‌شود که ده ایستگاه همزمان آمادگی شلیک به سمت شیء مذکور را دارند. می‌خواهیم مسیری را انتخاب نماییم که شیء پرنده علی‌رغم شلیک همزمان از ده ایستگاه که سرعت گلوله

ها نیز دلخواه است مسیری را بییماید که در کمترین زمان و از کوتاهترین مسیر به نقطه q برسد. براساس مطالعات کروپینا کوتاهترین مسیر از بعد زمان برای اینکه گلوله‌ها به یک هدف برخورد کنند، ژئودزیک‌های متر فینسلری است که بعدها به نام خود او متر کروپینا نامگذاری شدند. با توجه به تعریف، متر کروپینا به فرم زیر تعریف می شود

$$F = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

که در آن برای $y \in T_x M$ ، توابع α و β به صورت زیر می باشند

$$\alpha = \sqrt{\langle y, y \rangle}, \quad \beta = w_i y^i,$$

در اینجا $\langle \cdot \rangle$ متر اقلیدسی و $w = w_i dx^i$ یک 1-فرمی در فضای سه بعدی اقلیدسی است. لازم به توجه است که w براساس شرایط توپوگرافی منطقه اعم از نیروی باد، رطوبت و تعیین می شود. در اینصورت شیء پرنده برای اینکه در کمترین زمان وبدون اصابت با گلوله ها بخواهد به نقطه q برسد آن است که در مسیر ژئودزیک های متر راندزری

$$F = \alpha + \beta$$

حرکت کند که توابع α و β آن همان توابع α و β متر کروپینا هستند، [۶]. حال با توجه به توضیحات بالا یک مثال کاربردی و واقعی از این مساله را شبیه سازی می کنیم.

ابتدا منطقه جنگی به عنوان یک فضای سه بعدی اقلیدسی که مبدا مختصات آن موقعیت جغرافیایی فرد ناظر باشد در نظر میگیریم فرض میکنیم که در لحظه شلیک گلوله ها به سمت شیء پرنده موقعیت مکانی شیء پرنده R و موقعیت مکانی ایستگاه های شلیک کننده $K1, \dots, K10$ به صورت زیر باشند

$$R := (0.1, 0.1, 0.1), \quad K1 := (0.1, 0.1, 0.7), \quad K2 := (0.4, 0.4, 0.4),$$

$$K3 := (0.2, 0.2, 0.2), \quad K4 := (0.2, 0.3, 0.3), \quad K5 := (0.5, 0.5, 0.4),$$

$$K6 := (0.6, 0.6, 0.3), \quad K7 := (0.1, 0.3, 0.5), \quad K8 := (0.2, 0.3, 0.4),$$

$$K9 := (0.1, 0.2, 0.4), \quad K10 := (0.4, 0.1, 0.6),$$

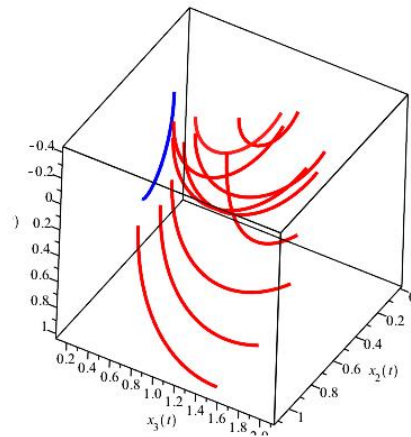
و گلوله ها باتوجه به شرایط توپوگرافی منطقه روی ژئودزیک های متر کروپینای $F = \frac{\alpha}{\beta^2}$ حرکت کنند که توابع α و β به صورت زیر

$$\alpha = \frac{\sqrt{(-zu+yv+xw)^2+(u^2+v^2+w^2)(1-x^2-y^2-z^2)}}{1-x^2-y^2-z^2}$$

و

$$\beta = -\frac{-zu+yv+xw}{1-x^2-y^2-z^2}$$

تعریف شده باشند. در اینصورت مسیر بهینه برای اینکه شیء پرنده بدون برخورد به گلوله ها به مقصد خود یعنی نقطه q برسد آنست که پرنده روی ژئودزیک های متر راندزری $F = \alpha + \beta$ حرکت کند که توابع α و β آن همان توابع α و β متر کروپینایی هستند که گلوله ها از ده ایستگاه در مسیر ژئودزیک ها آن به سمت شیء پرنده شلیک شده اند. با شبیه سازی مسیر حرکت گلوله ها از ده ایستگاه شلیک کننده که با رنگ قرمز نشان داده شده اند و مسیر حرکت شیء پرنده روی ژئودزیک های متر راندزری که با رنگ آبی نشان داده شده است به کمک برنامه میپل می توان مشاهده کرد که علی رغم تفاوت سرعت گلوله‌ها و شیء پرنده، هیچگاه گلوله ها به شیء پرنده اصابت نمی کنند. در ذیل شبیه سازی این مساله به کمک برنامه میپل ارائه شده است.



شکل 2: شبیه سازی مسیر بهینه حرکت یک شیء پرنده که از ده ایستگاه همزمان به آن شلیک می شود.

در خاتمه لازم است توجه شود به دلیل آنکه استفاده از مسیرهای بهینه متریک راندروزی در حل مسائل گریز و مسیرهای بهینه متریک کروپینا و ماتسوموتو در حل مسائل تعقیب یکی از جدیدترین روشها در حل مسایل ناوبری است، استفاده از هندسه فینسلری امروزه در جنگهای مدرن به شدت مورد توجه صاحبان صنایع نظامی و دفاعی قرار دارد.

مراجع

1. ب. بیدآباد، هندسه منیفلد ۲، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، 1391.
2. H. Attarchi, B. Bidabad, M. Mirmohammad Rezaei, *A novel navigation method for pursuing a moving target*, Iranian Journal of Science and Technology (Sciences), **34** (2010) 313-320.
3. H. Attarchi, B. Bidabad, S.M. Kazemi Torbaghan, M. Khosravi, *Towards a Novel Family of Algorithms in Pursuit Navigation*, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, accepted (2019).
4. H. Attarchi, B. Bidabad, S.M. Kazemi Torbaghan, M. Khosravi, *Trajectories of pursuit navigation problems and their geometry*, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, submitted (2019).
5. H. Attarchi, B. Bidabad, M. Mirmohammad Rezaei, *3D-Algorithms of Composed Pursuit Navigation*. arXiv preprint (2012) arXiv:1205.4422.
6. D. Bao, C. Robles, Z. Shen, *Zermelo navigation on Riemannian manifolds*, Journal of Differential Geometry **66** (2004) 377-435.
7. L. Huang, X. Mo, *On the flag curvature of a class of Finsler metrics produced by the navigation problem*. Pacific Journal of Mathematics, **277(1)** (2015) 149-168.