بهینه سازی فضای سرویس دهنده ها با استفاده از نرم های مختلف

محسن مصیبی[۱]، حسین شبانی[۲].

چکیده

در دنیای واقعی همواره با سطوحی سروکار داریم که برای حرکت در آنها توابع فاصله مختلفی تعریف شده است. به عنوان مثال فرض کنید صفحه R^2 نواحی متفاوت با نرم‌های L_1، L_2 و L_∞ باشد و P مجموعه دلخواهی از نقاط سرویس دهنده در صفحه هستند که هر یک از آن‌ها را سایت‌می‌نامیم و تمام صفحه متشکل از سرویس گیرنده ها میباشد. هدف یافتن فضاهای بهینه سرویس برای سایت‌های موجود در صفحه تحت نرم ناحیه‌ای که سایت در آن قرار دارد، است. بدیهی است زمانی که ناحیه دارای نرم های متفاوت است فضاهای سرویس دهنده ها متفاوت و پیچیده تر از زمانی خوهد بود که ناحیه دارای یک نرم واحد است.

کلمات کلیدی: بهینه سازی فضاهای سرویس، نرم های مختلف، شکل های ورونی بهینه

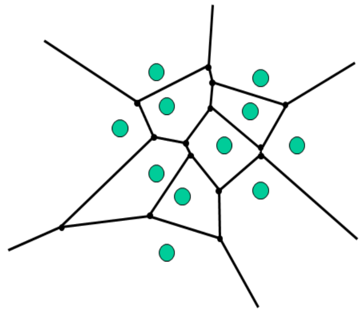
۱. مقدمه

هنگام مطالعه فعالیت‌های انسانی در جغرافیای طبیعی، اجتماعی و .. باید رفتارهای احتمالی را شبیه‌سازی نمود. در هندسه محاسباتی، سایت‌ها مکان‌ها یا مراکزی هستند که خدمات مشخصی را فراهم می‌کنند. برای مثال پیش‌بینی مکان مناسب برای فضاهای تجاری یک شهر یا شهرهای معین جهت جذب مشتری و یا نوع تصمیم‌گیری و رفتار مشتریان در مورد خرید و محل آن باید تخمین زده شود. برای مطالعه این چنین مسائلی باید مفروضاتی را در نظر بگیریم که ممکن است تمام آن‌ها برآورده نشود. برای مثال ممکن است فرض شود قیمت یک کالا یا خدمت خاص در هر سایت، مشابه است اما قیمت یک کالا در یک سایت ارزان‌تر از سایر سایت‌ها باشد اما تقریب فوق می‌تواند تقریب خوبی برای فضاهای خرید و فروش باشد. فرض‌های موجود در مدل، باعث افراز فضا به زیربخش‌هایی می‌شود که به آنها فضاهای سرویس دهنده ها میگوییم. در این مثال این زیربخش‌ها همان نواحی خرید و فروش تحت بررسی هستند. کسانی که در یک ناحیه زندگی می‌کنند، همگی به‌منظور خرید به یک سایت مراجعه می‌نمایند. در واقع فرضیات موجود در مدل، بیانگر این واقعیت‌اند که مردم با داشتن اختیار و آزادی انتخاب، اجناس خود را از نزدیک‌ترین سایت تهیه می‌نمایند. این به آن معنی است که فضاهای خرید و فروش(فضاهای سرویس دهنده ها) برای یک سایت، شامل همه‌ی نقاطی است که سایت مورد نظر، از هر سایت دیگری به آن نقاط نزدیک‌تر است.

مدلی که هر نقطه به نزدیک‌ترین سایت اختصاص پیدا می‌کند را *مدل تخصیص ورونی* گویند. زیربخش‌های به‌وجود آمده به‌وسیله‌ی این مدل نیز شکل‌های ورونی (یا فضاهای بهینه سرویس) مجموعه سایت‌ها نامیده می‌شوند.

۱-دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه آزاد اسلامی – واحد تهران جنوب

۲- دانشکده و پژوهشکده مهندسی و پدافند غیرعامل، دانشگاه جامع امام حسین (ع)



۱-۱ فضاهای بهینه سرویس دهنده ها

می‌توان از یک شکل ورونی، انواع اطلاعات در مورد فضاهای سایت‌ها و روابط آن‌ها را به‌دست آورد. شکل ورونی، یک ساختار هندسی فراگیر است که کاربرد آن نه تنها برای جغرافیای انسانی است بلکه در فیزیک، نجوم، رباتیک و بسیاری زمینه‌های دیگر نیز کاربرد دارند. در ادامه برخی تعاریف مورد نیاز آورده و در نگارش الگوریتم جدید و برنامه‌های کامپیوتری بر اساس برنامه متلب از مراجع [1-6] استفاده شده است.

فرض کنید p و q دو نقطه در صفحه R^2 هستند. دراین‌صورت فاصله این دو نقطه در نرم‌های L_1، L_2 و L_∞ به ترتیب برابر است با:

$$d_1(p,q) = |x_p \quad x_q| + |y_p \quad y_q|,$$
$$d_2(p,q) = \sqrt{(x_p \quad x_q)^2 + (y_p \quad y_q)^2},$$
$$d_\infty(p,q) = \max(|x_p \quad x_q|,|y_p \quad y_q|).$$

گیریم P مجموعه‌ای از n نقطه یا سایت در صفحه باشد. شکل ورونی P، که با $vor(P)$ نشان داده می‌شود، افراز صفحه به n ناحیه است. هر ناحیه اختصاص به یک سایت p از مجموعه‌ی P دارد که شامل همه‌ی نقاطی از صفحه است که p نزدیک‌ترین سایت به آن‌ها است و با $v(p)$ نشان می‌دهند. این مجموعه نقاط، فضاهای سرویس را شکل میدهند. $v(p)$ محل عبور $n \quad 1$ نیم‌صفحه است.که یک ناحیه‌ی چندوجهی محدب باز احتمالاً بی‌کران است که به‌وسیله‌ی حداکثر $n \quad 1$ رأس و حداکثر $n \quad 1$ یال، کران‌دار شده است. یک یال ورونی زیرمجموعه‌ای از نقاطی است که از p و q متساوی الفاصله‌اند. عمودمنصف p و q را به صورت عمود منصف پاره‌خط pq تعریف می‌شود.

یک زیربخش مسطح بیشینه، زیربخشی است به‌طوری‌که هیچ یالی که دو رأس آن را به یکدیگر متصل می‌کند، نمی‌تواند به آن اضافه شود جز این‌که مسطح بودن آن را از بین ببرد. یک مثلث‌بندی از P به صورت یک زیربخش مسطح بیشینه تعریف می‌شود به‌طوری که مجموعه‌ی رئوس آن P هستند. بین هر دو نقطه مجاور از P مانند p و q پاره‌خطی مانند $\overline{pq}$ رسم می‌کنیم. شکل به‌دست آمده را گراف دوگانی نامیده و با $DG(P)$ نشان داده می‌شود. گراف دوگانی یک مجموعه از نقاط مسطح، مسطح است و برای هر رأس $vor(P)$ یک صفحه دارد. اگر رأس v متناظر با سایت‌های p_1، p_2، ... و p_k باشد، آن‌گاه صفحه f متناظر در $DG(P)$، این سایت‌ها را به عنوان رأس در اختیار دارد و p_1، p_2، ... و p_k روی یک دایره اطراف v قرار داشته و بنابراین f یک k ضلعی محدب است. اگر مجموعه سایت‌ها به‌صورت تصادفی در صفحه پخش شده باشند، احتمال وجود چهار نقطه روی یک دایره بسیار کم است و لذا می‌توان فرض کرد که همه رئوس شکل ورونی از درجه ۳ بوده و در نتیجه همه صفحات کران‌دار $DG(P)$ مثلث هستند و $DG(P)$ مثلث‌بندی دوگان می‌نامند.

به طور مشابه می‌توان مثلث‌بندی دوگان را برای صفحه دارای نرم‌های L_1 و L_∞ بررسی نمود. الگوریتمی که مثلث‌بندی دوگانی L_∞ را روی یک مجموعه از سایت‌ها محاسبه می‌کند، می‌تواند برای محاسبه‌ی مثلث‌بندی دوگان L_1،

روی یک مجموعه از سایت‌ها نیز استفاده شود. وقتی نقاط در صفحه تحت نرم L_1، با استفاده از روابط $x + y \to u$ و $x - y \to v$ تبدیل شوند، آن‌گاه با فرض $U = (u_1,v_1)$ و $V = (u_2,v_2)$ خواهیم داشت $d_\infty(U,V) = d_1(x,y)$.

۲. شکل‌های ورونی در صفحه‌ای با نرم‌های مختلف

برای رسم شکل‌های ورونی در صفحه‌ای با نرم‌های متفاوت، با الگوریتم جاروب صفحه، برای هر سایت، عمودمنصف بین خط جاروب و سایت‌های موجود در صفحه، و سپس خط مرزی متناظر با سایت‌ها را ترسیم می‌کنیم. یال‌های ورونی، از محل برخورد عمودمنصف‌ها روی خط مرزی شکل می‌گیرند. فرض کنید $p_1 = (a_1,b_1) \in \Omega_1$ و $p_2 = (a_2,b_2) \in \Omega_2$. دراین‌صورت اگر خط جاروب دارای معادله‌ی $L : y = c$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی عمودمنصف بین نقطه‌ی p_1 و خط L در ناحیه‌ی Ω_1 از رابطه‌ی $|x - a_1| + |y - b_1| = |y - c|$ و در ناحیه‌ی Ω_2 از رابطه‌ی $|a_1| + \sqrt{x^2 + (y - b_1)^2} = |y - c|$، به‌دست می‌آید. هم‌چنین معادله‌ی عمودمنصف بین نقطه‌ی p_2 و خط L در ناحیه‌ی Ω_1 برابر $|x| + \sqrt{a_2^2 + (y - b_2)^2} = |y - c|$ و در ناحیه‌ی Ω_2 مقدار $\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2} = |y - c|$ دارد.

فرض کنید صفحه‌ی R^2 وسط خط $L : x = 0$ به نواحی Ω_1 با نرم L_1 و Ω_2 با نرم L_2 تقسیم شده است و P مجموعه‌ای از سایت‌ها است و نیز X و Y دو ساختار اطلاعاتی هستند. از یک صف اولویت X برای کنترل موقعیت خط جاروب و نوع فضایی که در آن قرار دارد، استفاده می‌کنیم. هم‌چنین ساختمان اطلاعاتی Y، مکانی است که سایت‌ها در آن به ترتیب عکس الفبایی روی مختصات خود، ذخیره می‌شوند. در ابتدا مختصات تمامی سایت‌ها را به مختصات آن‌ها در نرم L_∞ تبدیل می‌کنیم. خط جاروب L، خطی است اریب، از چپ به راست ابتدا ناحیه‌ی Ω_1 و سپس ناحیه‌ی Ω_2 را به صورت مورب جاروب می‌کند و در حین جاروب صفحه، یال‌های مثلث‌بندی را ترسیم می‌کند. رویدادها در X دو نوع فعال‌سازی سایت و غیرفعال‌سازی سایت می‌باشند. زمانی که خط جاروب به یک سایت می‌رسد، آن سایت فعال می‌شود و به Y وارد می‌شود و تا زمانی که سایت مورد نظر فعال است، در Y باقی می‌ماند. در ادامه به دنبال جاروب صفحه توسط L، رکورد غیرفعال‌سازی برای آن تعیین می‌شود. در زمان فعال‌سازی هر سایت، ابتدا اولویت‌های غیرفعال‌سازی سایت‌های قبل، بررسی می‌شود و در صورتی که زمان غیرفعال‌سازی سایتی فرا رسیده باشد، آن را غیرفعال می‌کنیم. هم‌چنین اگر لازم است اولویت غیرفعال‌سازی سایتی تغییر کند، آن را تغییر می‌دهیم. برای ترسیم تمامی یال‌ها، دو سایت مصنوعی در بی‌نهایت در نظر می‌گیریم که در پایان نیز می‌توان یال‌های متصل‌شده به این دو سایت را حذف نمود. خط جاروب به ترتیب اولویت فعال‌سازی مربوط به سایت‌ها را انجام می‌دهد. حرکت خط L، به مکان سایت‌ها محدود می‌شود، به عبارت دیگر خط جاروب، گام به گام روی سایت‌ها حرکت می‌کند. هم‌زمان با این فعال‌سازی، غیرفعال‌سازی و همچنین تغییر اولویت غیرفعال‌سازی سایت‌ها نیز انجام می‌شود. تا زمانی که سایت‌های موجود روی الگوریتم جاروب همگی در ناحیه‌ی Ω_1 قرار دارند، الگوریتم همان روند نرم L_1 را طی می‌کند.

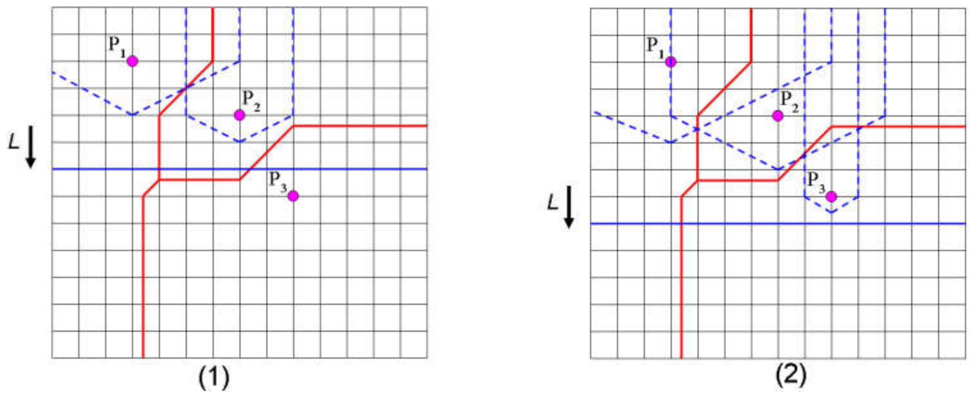
حال فرض کنید مجموعه‌ای از سایت‌ها مانند P در صفحه‌ای با نرم L_1 موجود است. هدف ما ترسیم مثلث‌بندی بهینه‌ی دوگان مجموعه‌ی P است. برای این منظور، در ابتدا با مثلث‌بندی دلخواهی از مجموعه‌ی P شروع می‌کنیم. سپس به ازای سایت‌های موجود روی رئوس هر مثلث، دایره‌ی نرم L_1 را از روی سه نقطه‌ی مزبور عبور می‌دهیم. اگر درون دایره‌ی نرم L_1 شامل هیچ سایت دیگری نباشد، این مثلث‌بندی، بهینه است ولی اگر درون این دایره شامل سایت دیگری باشد، با ضربه زدن به یال مشترک بین دو مثلث و چرخش آن، مثلث‌بندی را عوض می‌کنیم.

به‌طور مشابه، همین روند را می‌توان برای ترسیم مثلث‌بندی بهینه‌ی دوگانی نرم L_∞ به‌کار برد. با این تفاوت که در نرم L_∞، به جای استفاده از دایره‌ی یکانی نرم L_1، باید از دایره‌ی یکانی نرم L_∞ استفاده نمود. فرض کنید مجموعه‌ی نقاط P در دست باشد، دراین‌صورت برای $vor(p)$ روابط زیر برقرار است:

الف) نقطه‌ی q، رأس $vor(p)$ است اگر و تنها اگر $C_p(q)$ شامل سه سایت یا بیشتر روی مرزش باشد.

ب) عمودمنصف بین سایت‌های p_i و p_j یالی از $vor(p)$ است اگر و تنها اگر نقطه‌ای مثل q روی عمودمنصف وجود داشته باشد به‌طوری‌که $C_p(q)$ شامل p_i و p_j روی مرز خود بوده امّا هیچ سایت دیگری روی این مرز نباشد.

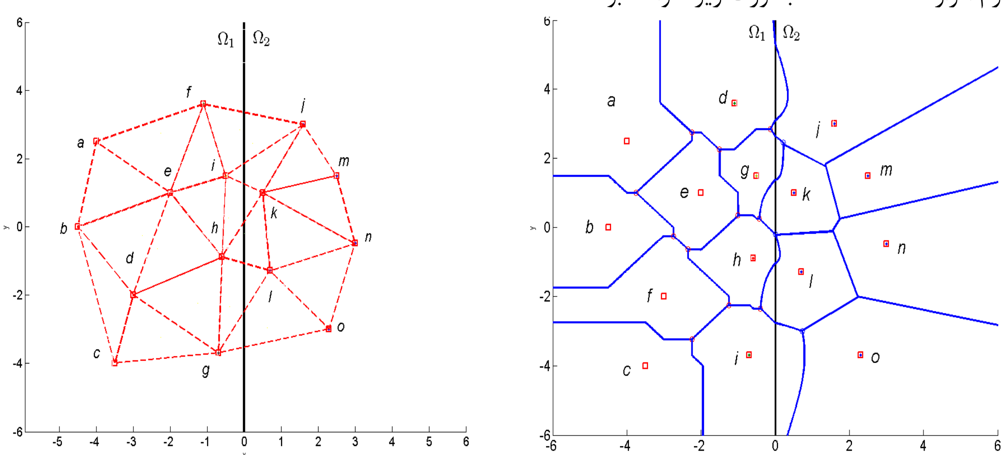
فرض کنید صفحه‌ی R^2 دارای نرم L_1 باشد و P شامل مجموعه نقاط دلخواهی در آن باشد که آن‌ها را سایت می‌نامیم. برای ترسیم اشکال ورونی در صفحه‌ی Ω_1 با نرم L_1، با استفاده از الگوریتم جاروب صفحه را از بالا به پایین جاروب می‌کنیم. مانند آن‌چه در نرم L_2 بیان شد، از اتصال پایین‌ترین قسمت عمودمنصف‌های نقاط به یکدیگر، خط مرزی را ترسیم می‌کنیم. پس از پایان جاروب صفحه توسط خط L، اشکال ورونی مربوط به سایت‌ها ترسیم شده‌اند. همین روند را می‌توان به‌طور مشابه برای ترسیم اشکال ورونی در نرم L_∞ به‌کار برد. اجرای این الگوریتم به واسطه‌ی حرکت پیوسته‌ی آن، کار سخت و پیچیده‌ای است. لذا برای ترسیم اشکال ورونی از الگوریتم Y- پیشرو، می توان استفاده نمود.



۲-۱ رسم اشکال ورونی با استفاده از جاروب صفحه در نرم L_1

۳. نتیجه‌گیری

ترسیم شکل‌های ورونی در صفحه با نرم L_2 با دو الگوریتم جاروب با زمان $O(n \log n)$ و الگوریتم مثلث‌بندی امکان‌پذیر است. با الگو گرفتن از الگوریتم جاروب صفحه برای نرم اقلیدسی، مشابه آن برای نرم‌های L_1 و L_2 اجرا شده و بنابراین فضاهای بهینه سرویس دهنده ها در این نرمها و با استفاده از نرم‌افزار MATLAB ترسیم خواهند شد. برای نقاط موجود در صفحه ای با نرم‌های مختلف، به جای یک نرم واحد، نرم های مختلف را در نظر گرفته و شکل‌های ورونی (فضاهای سرویس دهنده ها) حاصل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدیهی است شبیه سازی چنین حالتی در دنیای واقعی همان فضاهای درون شهری با نرم L_1 و فضاهای بیرون شهری با نرم L_2 میباشد که شکل بهینه نقاط سرویس دهنده باکمک نرم افزار MATLAB بصورت زیر خواهد بود.



۳-۱ مثلث‌بندی دوگانی و فضاهای بهینه سرویس دهنده های متناظر با آن

۴. مراجع

1.Benkoczi, R., Bhattacharya, B. K., Das, S. and Sember, J. (2009) “Single facility collection depots location problem in the plane”, *Computational Geometry: Theory and Applications*, **42**, pp 403–418.

2. Lingas, A. (1989), “Voronoi diagran with barriers and the shortest diagonal problem”, *Information Processing Letters*, **32**, pp 191-198.

3. Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K., Nok Chiu , S. and Kendall, D. G. (2000) “Spatial Tessellations: Consepts and Applications of Voronoi Diagrams”, *Wiley Series in Probability and Statistics, 2nd Edition*.

4. Klee, V. (1980) “On the complexity of d-dimensional Voronoi diagrams”, *Archiv de Mathematik*, **34**, pp. 56-60.

5. Klamroth, K. (2002), “Single-facility location problems with barriers”. *Springer series in operations research. Berlin*.

6.Zaferanieh, M., Taghizadeh Kakhki, H., Brimberg, J. and Wesolowsky, G. O. (2008) “A BSSS algorithm for the single facility location problem in two regions with different norms”, *Operational Research*, **190**, pp 79-89.