# رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده کارا: مدل لی و مدل سهم مرز مرجع

*مهدیه امیری[۱*]، دکتر علی اشرفی[۲]*

[۱] *دانشجوی دکتری، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان*

*Mahdie.amiri@semnan.ac.ir*

[۲] *استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان*

*a_ashrafi@semnan.ac.ir*

**چکیده:** در ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده به کمک مدل های DEA، ممکن است بیش از یک واحد تصمیم گیرنده دارای مقدار کارایی یک باشند. از آنجایی که رتبه بندي واحدهای تصمیم گیرنده کارا براي تصمیم گیران ضروري است لذا در سال های اخیر روش ها و مدل های مختلفی بدین منظور ارائه شده است. این پژوهش ابتدا دو مدل رتبه بندی لی بر اساس بازی همکارانه و سهم مرز مرجع را شرح داده و سپس به مقایسه نتایج رتبه بندی ۲۰ شعبه از شعبات بانک در سراسر کشور به دست آمده از این دو روش می پردازد. با استفاده از ضریب همبستگی اسپیرمن نشان می دهیم که این دو مدل دارای رتبه بندی مشابه و ارتباط همبستگی قوی هستند.

## ۱. پیش‌گفتار

ارزیابی عملکرد سازمان ها با هر سیستمی، به منظور افزایش بهره وری، از اهمیت ویژه ای برخورداراست که معمولا با مدل بندی سیستم های مختلف به کمک شاخه های گوناگونی از ریاضیات، این امر تحقق می یابد. تحلیل پوششی داده ها که به اختصار DEA نامیده می شود، یکی از روش های غیرپارامتریک و کمی برای بررسی کارایی سیستم ها است. از آنجا که در مدل های کلاسیک DEA ، معمولا بیش از یک واحد کارا وجود دارد، ارائه مدل هایی به منظور رتبه بندی واحدهای کارا و انتخاب یک واحد تصمیم گیرنده به عنوان کاراترین واحد در بین تمام واحدها، یکی از فعالیت های مورد توجه در تحلیل پوششی داده ها است. بدین منظور روش ها و مدل های مختلفی ارائه شده است.

## ۲. پیشینه

در سال ۲۰۰۶ ناکابایاشی و همکاران [۶] پژوهشی تحت عنوان "معمای یک انسان خودخواه، یک بازی DEA "ارایه دادند که دو روش تحلیل پوششی داده ها و نظریه بازی ها را ترکیب کرده و به بررسی آن پرداختند. آن ها اتفاق نظر بین اشخاص و سازمان هایی که دارای معیارهای مختلف برای ارزیابی عملکرد خود بودند را با استفاده از نظریه بازی همکارانه حل کردند. جی و همکاران [۳] کارایی متقاطع واحدهای تصمیم گیرنده در تحلیل پوششی داده ها را با استفاده از نظریه بازی ها تعیین کردند. آن ها یک بازی ائتلافی را تعریف کردند که در آن DMU ها، بازیکنان این بازی هستند و برای تمام ائتلاف ها مقدار توابع مشخصه را تعیین کردند.

---

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

**واژگان کلیدی:** تحلیل پوششی داده ها، رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده کارا، نظریه بازی ها، مدل لی، مدل سهم مرز مرجع

* سخنران

آن ها ارزش هسته ای را به عنوان راه حل در نظر گرفتند و از الگوریتم ژنتیک برای بدست آوردن ارزش هسته ای و وزن نهایی هر DMU استفاده کردند. چارنز و همکاران [۱] تعداد دفعاتی که یک واحد کارا می تواند در مجموعه مرجع واحدهای ناکارا قرار داشته باشد را به عنوان یک عامل رتبه بندی واحدهای کارا در نظر گرفتند. جهانشاهلو وهمکاران [۲] یک روشی ارائه دادند که در آن مجموعه مرجع تغییر داده می شود. این روش تغییرات مقدار کارایی دیگر واحدهای تصمیم گیرنده را هنگامی که واحد تصمیم گیرنده تحت ارزیابی از مجموعه مرجع حذف می شود اندازه گیری می کند.

## ۳. شرح مدل های لی و سهم مرز مرجع

مدل سهم مرز مرجع یک روش جدید رتبه بندی واحدهای کارا مبنی بر سهم هرواحد کارا در مرز مرجع واحدهای ناکارا می باشد. مرز مرجع یک $DMU$ ناکارا، مجموعه تمام نقاط کارای یک مجموعه امکان تولید است که بر آن $DMU$ ناکارا غالب هستند. واحدهای بهبود یافته یک $DMU$ ناکارا، اعضای مرز مرجع آن $DMU$ هستند. اعضای مجموعه مرجع یک $DMU$ به منظور ارزیابی آن $DMU$ به کار می رود و حضور یک $DMU$ در مجموعه مرجع دیگر $DMU$ ها، اهمیت آن $DMU$ را نشان می دهد. مرز مرجع یک $DMUp$ ، $N_p$، شامل تمام واحدهای بهبود یافته ممکن کارا برای $DMUp$ است. هر عضو از مجموعه $N_p$ را می توان بصورت ترکیب محدب از اعضای E نوشت. سهم یک $DMUo$ کارا در $N_p$ را به صورت ماکزیمم مقدارضریب مربوط به ترکیبات محدب نشان دهنده عناصر $N_p$ تعریف می شود. به عبارت دیگر سهم $DMUo$ در $N_p$، ماکزیمم مقدار $\lambda_o$ در واحد بهبود یافته $DMUp$ می باشد.

**تعریف ۱ :** سهم مرز مرجع $DMUo$ برای $DMUp$ که با $\lambda_{po}$ نشان دده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$\lambda_{po} = \max\{\lambda_o \mid (\sum_{j\in E}\lambda_j x_j, \sum_{j\in E}\lambda_j y_j) \in \mathrm{N}_p, \sum_{j\in E}\lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0\ (j \in E)\}$$

سهم مرز مرجع $DMUo$ بصورت $\bar{\lambda}_o = \sum_{p\in IE}\lambda_{po}$ تعریف می شود که لازم است که $IE$ ناتهی است. مدل رتبه بندی واحدهای کارا مبتنی بر سهم مرز مرجع آن ها به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
\lambda_{po} = \max\ & \lambda_o \\
s.t.\ & \sum_{j\in E}\lambda_j x_{ij} \leq x_{ip} && i = 1,\ldots,\mathrm{m} \\
& \sum_{j\in E}\lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} && r = 1,\ldots,s \\
& \sum_{j\in E}\lambda_j = 1 \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + u_0 = d_j && j \in E \\
& \lambda_j \leq t_j && j \in E \\
& d_j \leq M\,(1-t_j) && j \in E \\
& v_i \geq 1, u_r \geq 1 && i = 1,\ldots,m \\
& && r = 1,\ldots,s \\
& u_0 \ \ free \\
& \lambda_j \geq 0, d_j \geq 0 && j \in E \\
& t_j \in \{0,1\} && j \in E
\end{aligned} \qquad (۱)$$

مدل سهم مرز مرجع همواره شدنی و نسبت به تغییر واحد و انتقال پایدار است.

نظریه بازی ها علمی است که به مطالعه تصمیم گیری افراد در شرایط تعامل با دیگران می پردازد. نظریه بازی ها به دو شاخه اصلی تقسیم می شود بازی های همکارانه و بازی های بدون همکاری. در بازی بدون همکارانه هر بازیکن استراتژی خود را بدون مشورت با بازیکنان دیگر بر مبنای رقابت و کسب بیشترین سود در بین بازیکنان انتخاب می کند. در حالی که در بازی همکارانه،

بازیکنان درخصوص تصمیم گیری درباره استراتژی ها با یکدیگر همکاری می کنند[۴]. به منظور امکان همکاری بین واحد های تصمیم گیرنده در تحلیل پوشش داده ها به عنوان بازیکنان از بازی همکارانه استفاده می شود که یک تابع مشخصه قوی برای تعیین نتیجه هر ائتلاف وجود دارد.

یک بازی همکارانه، یک زوج مرتب به فرم $(N,v)$ است که $N$ یک مجموعه متناهی بازیکنان است. $v$ یک تابع مشخصه با مقدار حقیقی است که به صورت $v: 2^N \to \mathbb{R}$ و $v(\varnothing) = 0$ است. زیرمجموعه $S$ از $N$ را یک ائتلاف می نامند. مقدار $v(S)$ ارزش ائتلاف $S$ در بازی همکارانه $(N,v)$ را نشان می دهد. در بازی همکارانه دو موضوع مطرح است. اول اینکه چه ائتلافی شکل بگیرد. دوم اینکه در صورت شکل گیری ائتلاف، بازیکنان چگونه سود یا هزینه را تقسیم خواهند کرد.

هسته بازی از مهمترین مفاهیم موجود در نظریه بازی همکارانه می باشد. در بازی همکارانه، هسته مجموعه ای از تخصیص ها را ارائه می دهد که در آن همه ائتلاف ها از عایدی تخصیص داده شده راضی هستند. در یک بازی همکارانه $G=(N,v)$، هسته یک مجموعه تخصیص های شدنی که نمی توان آن را توسط یک زیرمجموعه از عامل ها (ائتلاف ها) بهبود داد. ناحیه مرکز به صورت زیر است:

$$C = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \mid \sum_{i\in N} x_i = v(N) \text{ and } \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \text{ for } \forall S \subset N\} \qquad (۱۰)$$

$v(N)$ و $v(S)$ به ترتیب ارزش ائتلاف $N$ و $S$ را نشان می دهند. فرض می کنیم بردار $x = (x_1,\ldots,x_n)$ سهم اختصاص یافته به هر بازیکن باشد که در آن $n$ تعداد بازیکنان است

مدل لی [۲] یک بازی همکارانه است که در آن واحدهای تصمیم گیرنده کارا، مجموعه بازیکنان هستند و تابع مشخصه برای هر $S \subseteq N$، مجموع تغییرات مقدار ابرکارایی واحدهای تصمیم گیرنده کارا در ائتلاف $S$ را نشان می دهد. لذا تابع مشخصه برای هر $S \subseteq N$ بصورت زیر است:

$$v(S) = \sum_{k\in S} (E_k(M \setminus S) - 1) \qquad (۲)$$

فرض می کنیم $M$ مجموعه واحدهای تصمیم گیرنده مستقل باشد. برای هر $T \subseteq M$، فرض کنید $E_j(T)$ مقدارکارایی $CCR$ ورودی محور یک واحد تصمیم گیرنده $DMU_j \in T$ با در نظر گرفتن تنها واحدهای تصمیم گیرنده متعلق به $T$ در نمونه باشد. ارزش شپلی یکی از روش ها در نظریه بازی همکارانه به منظور محاسبه تخصیص عایدی حاصل از همکاری بین بازیکنان ائتلاف است[۴]. از ارزش شپلی به عنوان راه حل جواب بازی همکارانه در مدل لی استفاده شده است. بنابراین اهمیت هر واحد تصمیم گیرنده کارا $k \in N$ با معیار ارزش شپلی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\varphi_k(v) = \sum_{S\subseteq N\setminus k} \frac{s!\,(n-s-1)!}{n!} \left[v(S\cup k) - v(S)\right] \qquad (۳)$$

که $n$ تعداد اعضای مجموعه $N$ و $s$ تعداد اعضای ائتلاف $S$ است.

۴. مثال عددی

مجموعه داده های بیست شعبه از شعبات بانک در سراسر کشور عنوان واحدهای تصمیم گیرنده را در نظر بگیرید[۲]. این مجموعه داده ها شامل سه ورودی و سه خروجی می باشد که یازده واحد تصمیم گیرنده با استفاده از مدل جمعی کارا هستند.

جدول ۱ نتایج بدست آمده از روش های رتبه بندی سهم مرز مرجع، ابرکارایی، ابر SBM، ابر جمعی و مدل لی را نشان می دهد.

جدول۱. نتایج رتبه بندی مدل های رتبه بندی واحدهای کارا

| DMU | مدل سهم مرز مرجع | رتبه بندی | مدل لی | رتبه بندی | ابرکارایی ورودی محور | ابرکارایی خروجی محور | ابر SBM | رتبه بندی | ابر جمعی | رتبه بندی |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.9034 | 9 | 5.4893 | 9 | 1.1748 | 1.2575 | 1.0584 | 9 | 1.0584 | 10 |
| 3 | 1.3016 | 11 | 4.6712 | 10 | ناشدنی | 1.0931 | 1.0347 | 11 | 1.0347 | 11 |
| 4 | 4.9944 | 3 | 7.0327 | 3 | ناشدنی | ناشدنی | 1.3384 | 2 | 1.4132 | 1 |
| 7 | 5.5639 | 1 | 8.0125 | 1 | ناشدنی | 1.233 | 1.0847 | 7 | 1.1843 | 4 |
| 8 | 1.3697 | 10 | 5.0264 | 7 | 1.215 | ناشدنی | 1.0717 | 8 | 1.0717 | 9 |
| 9 | 4.2284 | 5 | 6.9501 | 4 | 1.3775 | ناشدنی | 1.3067 | 3 | 1.3458 | 3 |
| 12 | 4.2976 | 4 | 6.9243 | 5 | ناشدنی | 1.1242 | 1.0567 | 10 | 1.0970 | 7 |
| 15 | 2.4482 | 7 | 6.7026 | 6 | ناشدنی | 5.0731 | 1.3654 | 1 | 1.3654 | 2 |
| 17 | 2.5488 | 6 | 6.8523 | 11 | ناشدنی | 1.5132 | 1.275 | 4 | 1.1383 | 5 |
| 19 | 2.3 | 8 | 6.5189 | 8 | 1.2796 | ناشدنی | 1.0932 | 6 | 1.0932 | 8 |
| 20 | 5.2993 | 2 | 7.2984 | 2 | 1.2641 | ناشدنی | 1.1047 | 5 | 1.1047 | 6 |

لازم به ذکر است که مدل ابرکارایی به دلیل ناشدنی بودن در بسیاری از نمونه ها کارایی ندارد. لذا نتایج رتبه بندی دیگر روش ها را با هم مقایسه می کنیم. با توجه به ویژگی های دو مدل رتبه بندی لی و سهم مرز مرجع، این دو مدل همواره شدنی هستند. به منظور مقایسه بندی نتایج رتبه بندی مدل های لی، سهم مرز مرجع، ابرSBM و ابر جمعی، از ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن استفاده می کنیم. ضریب همبستگی رتبه ای اسپیرمن مدل سهم مرز مرجع و مدل لی، مدل سهم مرز مرجع و ابرSBM و مدل سهم مرز مرجع و ابرجمعی به ترتیب برابر ۰،۸۶۸۱۸، ۰،۳۹۰۹۱ و ۰،۶۸۱۸۲ می باشد. هر چه مقدار ضریب اسپیرمن دو مدل به عدد یک نزدیکتر باشد، رتبه بندی آن دو مدل بسیار مشابه هم خواهد بود. لذا رتبه بندی مدل سهم مرز مرجع نزدیک به مدل لی می باشد و این دومدل دارای رابطه همبستگی قوی هستند.

## مراجع

[1] Charnes, A. , Clark, C. T. , Cooper, W. W. , & Golany, B. (1985a). A developmental study of data envelopment analysis in measuring the efficiency of maintenance units in the U.S. Air Forces. Annals of Operations Research, 2 , 95–112.

[2] Jahanshahloo, G. R. , Vieira Junior, H. , Hosseinzadeh Lofti, F. , & Akbarian, D. (2007). A new DEA ranking system based on changing the reference. *European Journal of Operational Research, 181* , 331–337.

[3] Jie, W., Liang, L., Ying, Z., (2008). Determination of the Weights of Ultimate Cross Efficiency based on the Solution of Nucleolus in Cooperative Game, Systems Engineering - Theory & Practice 28(5), 92-97.

[4] Kaplan, R.S., Norton, D.P., 1992, The balanced scorecard-measures that drive performance, Harvard Business Review 70, 9-71.

[5] Li, Y. ,Xie, J. , Wang, M. , & Liang, L., (2016). Super-efficiency evaluation using a common platform on a cooperative game. European journal of operational research, 884–892.

[6] Nakabayashi, K., Tone, K., (2006). Egoist's dilemma: a DEA game, Omega 34, 135-148.

[7] Rezaeiani, M. J., & Foroughi, A. A. (2018). Ranking efficient decision making units in data envelopment analysis based on reference frontier share. *European Journal of Operational Research*, *264*(2), 665-674.