



شرایط کافی برای وجود جواب برخی مسائل شمول شبه متغیر و مسائل شبه تعادل

مهدی وطن دوست*

گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری

m.vatandoost@hsu.ac.ir

چکیده: اخیراً شرایط کافی برای وجود جواب برخی مسائل شمول شبه متغیر بالایی و پائینی و مسائل شبه تعادل از جهت های ایده ال، پریو، سره و ضعیف ارایه شده است. در این مقاله، اشکالات اساسی در اثبات برخی از این نتایج را با مثال های نقض نشان می دهیم و سپس شرایط جدیدی را معرفی می کنیم که این نتایج معتبر هستند. در واقع، نشان می دهیم که نتایج زمانی معتبر هستند که نگاشت های چند مقداری دارای مقادیر فشرده و فضای کاری بارل باشد و در حالت های بسته، کراندار و محدب قضایای وجود همچنان نامعتبر هستند.

۱. پیش‌گفتار

این مقاله در زمینه مسائل شبه بهینه سازی در فضا های موضعاً محدب می باشد. اگر D زیر مجموعه فضای توپولوژیکی X و $\mathcal{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، برای نگاشت f از X به $\mathcal{R}$ ، مساله پیدا کردن $\bar{x} \in D$ بطوریکه $f(\bar{x}) = \min_{x \in D} f(x)$ نقش اساسی در نظریه بهینه سازی دارد. تعداد زیادی مسائل بهینه سازی خطی، محدب، تعادل و ... وجود دارند که امروزه به مسائلی با نگاشت های چند مقداری برداری گسترش داده شده اند. چون هر ترتیب خطی با یک مخروط محدب در تناظر است لذا اغلب در مسائل بهینه سازی با مخروط های محدب کار می کنند [1-4].

تعریف ۱.۱. یک فضای برداری توپولوژیکی (t.v.s)، فضای برداری است همراه با یک توپولوژی به طوری که نگاشت های $(x, y) \mapsto x + y$ و $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ پیوسته باشند.

تعریف ۱.۲. یک فضای برداری توپولوژیکی را موضعاً محدب (l.c.s) گویند هرگاه یک پایه موضعی از همسایگی های محدب داشته باشد.

فرض کنید X, Y و Z فضاهای برداری توپولوژیکی موضعاً محدب هاسدورف حقیقی و زیر مجموعه C از فضای Y یک مخروط محدب باشد. برای هر $D \subseteq X$ نگاشت چند مقداری F را با $F: D \rightarrow 2^Y$ نمایش می دهیم و دامنه و

AMS Mathematical Subject Classification [2010]: 47H04, 90C25, 90C33, 90C47.

واژگان کلیدی: مسائل شبه بهینه سازی، مسائل شمول شبه متغیر، مسائل شبه تعادل.

سخنران*

گراف F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{dom}(F) = \{x \in D \mid F(x) \neq \emptyset\}, \quad \text{Gr}(F) = \{(x, y) \in D \times Y \mid y \in F(x)\}.$$

همچنین نگاشت $F: D \rightarrow 2^Y$ را نیمه پیوسته بالایی (u.s.c) در نقطه $\bar{x} \in D$ می‌گوییم هرگاه برای هر مجموعه باز V شامل $F(\bar{x})$ ، مجموعه باز U شامل $\bar{x}$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x \in U$ ، $F(x) \subset V$.

تعریف ۳.۱. فرض کنید C یک مخروط محدب، $I(C) = C \cap (-C)$ و A زیر مجموعه ناتهی از Y باشد.

(الف) $x \in A$ را یک نقطه کارای ایده‌آل (مینیمال ایده‌آل) A نسبت به C گویند، اگر $x - y \in C$ برای هر $y \in A$. مجموعه نقاط مینیمال ایده‌آل A را با $\text{IMin}(A|C)$ نمایش می‌دهیم.

(ب) $x \in A$ را یک نقطه کارای پری‌تو (غیر تسلطی) A نسبت به C گویند، اگر $y \in A$ وجود نداشته باشد بطوریکه $x - y \in C \setminus I(C)$. مجموعه نقاط کارای پری‌تو A را با $\text{PMin}(A|C)$ نمایش می‌دهیم.

(پ) $x \in A$ را یک نقطه کارای سره A نسبت به C گویند، هرگاه یک مخروط محدب سره $\tilde{C}$ که کل فضا نیست و $C \setminus I(C) \subset \text{int}(\tilde{C})$ وجود داشته باشد بطوریکه $x \in \text{PMin}(A|\tilde{C})$. مجموعه نقاط کارای سره A را با $\text{PrMin}(A|C)$ نمایش می‌دهیم.

(ت) فرض کنید که $x \in A$ ، $\text{int}(C) \neq \emptyset$ را یک نقطه کارای ضعیف A نسبت به C گویند، هرگاه $x \in \text{PMin}(A|\{0\} \cup \text{int}(C))$. مجموعه نقاط کارای ضعیف A را با $\text{WMin}(A|C)$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به تعریف قبل، برای هر زیر مجموعه $A \subset Y$ می‌توان مجموعه نقاط کارای A نسبت به مخروط C از جهت ایده‌آل، پری‌تو، سره و ضعیف را تعریف کرد. مجموعه نقاط کارا را با نماد $\alpha \text{Min}(A|C)$ ($\alpha = \text{Pr}$ ؛ $\alpha = P$ ؛ $\alpha = I$) نمایش می‌دهیم. $\alpha = W$ به ترتیب برای حالت‌های ذکر شده در تعریف قبل (نمایش می‌دهیم).

برای تابع چند مقداری $F: D \rightarrow 2^Y$ مساله پیدا کردن $\bar{x} \in D$ بطوریکه $F(\bar{x}) \cap \alpha \text{Min}(F(D)|C) \neq \emptyset$ را مساله بهینه سازی α برداری سراسری $(GVOP)_\alpha$ متناظر با F ، D و C گویند. به مجموعه همه نقاط مانند $\bar{x}$ ، مجموعه جواب مساله $(GVOP)_\alpha$ و به عناصر $\alpha \text{Min}(F(D)|C) \neq \emptyset$ مقادیر بهین α در مساله $(GVOP)_\alpha$ گویند. فرض کنید که $D \subset X$ و $K \subset Z$ ، ناتهی باشند. اگر نگاشت‌های $T: D \times K \rightarrow 2^K$ ، $S: D \times K \rightarrow 2^D$ و $F: K \times D \times D \rightarrow 2^Y$ داده شده باشند آنگاه مساله پیدا کردن $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ بطوریکه:

$$F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) \cap \alpha \text{Min}(F(\bar{y}, \bar{x}, S(\bar{x}, \bar{y})) | C) \neq \emptyset, \quad \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}).$$

را مساله بهینه سازی α برداری سراسری $(GVQOP)_\alpha$ می نامند. همچنین به نگاشت های چند مقداری T, S و F به ترتیب نگاشت محدودیت، پتانسیل و مطلوبیت گفته می شود. این مسائل نقش محوری در نظریه بهینه سازی برداری دارند.

مساله شمول شبه متغیر بالایی (پائینی): مساله پیدا کردن $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$ بطوری که:

$$\bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y})$$

$$F(\bar{y}, \bar{x}, x) \subset F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) + C, \quad \forall x \in S(\bar{x}, \bar{y}) \quad (UQVIP)$$

$$(F(\bar{y}, \bar{x}, \bar{x}) \subset F(\bar{y}, \bar{x}, x) - C, \quad \forall x \in S(\bar{x}, \bar{y})) \quad (LQVIP).$$

گزاره ۱. ۴. اگر C مخروط محدب و A زیر مجموعه ناتهی از Y باشد، در حالت کلی روابط زیر بین مجموعه نقاط کارای A برقرار است.

$$\text{الف) } \text{PrMin}(A|C) \subseteq \text{PMin}(A|C) \subseteq \text{WMin}(A|C)$$

$$\text{ب) اگر } \text{IMin}(A|C) \neq \emptyset, \text{ آنگاه } \text{IMin}(A|C) = \text{PMin}(A|C).$$

تعریف ۱. ۵. فرض کنید نگاشت $F: D \rightarrow 2^Y$ داده شده باشد.

الف) F را C -پیوسته بالایی (پائینی) در نقطه $\bar{x} \in \text{dom}(F)$ گویند هرگاه برای هر همسایگی V از صفر در Y ، همسایگی U از $\bar{x}$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x \in U \cap \text{dom}(F)$ ، $F(x) \subset F(\bar{x}) + V + C$ ، $(F(\bar{x}) \subset F(x) + V - C)$.

ب) همچنین F روی D ، C -شبه محدب بالایی (پائینی) است اگر برای هر $x_1, x_2 \in D$ و $t \in [0, 1]$ ، یا

$$F(x_2) \subset F(tx_1 + (1-t)x_2) + C \quad \text{یا} \quad F(x_1) \subset F(tx_1 + (1-t)x_2) + C$$

$$(F(tx_1 + (1-t)x_2) \subset F(x_2) - C \quad \text{یا} \quad F(tx_1 + (1-t)x_2) \subset F(x_1) - C)$$

۲. نتایج اصلی

در مراجع [3,4,6] شرط کافی برای وجود جواب مسایل شبه شمول و شبه تعادل و همچنین مساله بهینه سازی

$(GVQOP)_\alpha$ اثبات شده است که تمامی اثبات ها بصورت جدی وابسته به گزاره (۳. ۱۰) در [3] و یک ادعا در اثبات قضیه (۳. ۱۰) در [4,6] می باشند. ما در منبع [5] با ارایه چند مثال نشان می دهیم که این گزاره و ادعا نامعتبر می باشند. سپس برای هر کدام شرایطی جدیدی را معرفی می کنیم که این دو معتبر هستند و در نتیجه شرایط کافی ارایه شده برای وجود جواب در شرایط جدید معتبر می شوند. در واقع نشان می دهیم که مقادیر تابع G حتی اگر بسته یا محدب و یا کراندار باشند نیز گزاره نامعتبر می باشد ولی در حالت فشرده بودن معتبر می باشد.

گزاره ۲. ۱۰. فرض کنید که B یک زیرمجموعه ناتهی، محدب و فشرده از مجموعه D است و $G: B \rightarrow 2^Y$ یک نگاشت C - شبه محدب بالایی و C - پیوسته بالایی، با مقادیر ناتهی و فشرده باشد. آنگاه $\bar{z} \in B$ وجود دارد بطوری که برای هر $z \in B$ ، $G(z) \subset G(\bar{z}) + C$.

تعریف ۲. ۲. اگر زیر مجموعه A از فضای برداری توپولوژیکی X طوری باشد که برای هر $x \in A$ و $|\alpha| \leq 1$ داشته باشیم، $\alpha x \in A$ آنگاه A را متعادل گویند. و هرگاه برای هر $x \in X$ ، $\lambda > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $0 \leq \lambda' \leq \lambda$ ، $\lambda' x \in A$ را شعاعی (یا جاذب) گویند. علاوه براین، در هرفضای برداری توپولوژیکی یک مجموعه را بارل گویند، هرگاه جاذب، متعادل، محدب و بسته باشد.

همچنین نشان می دهیم که شرط بارل بودن فضا در فضاهای موضعاً محدب برای اعتبار بقیه قضایای وجود وابسته به ادعای مذکور ضروری است. در واقع، در فضاهای موضعاً محدب هر مجموعه بارل، یک همسایگی از صفر می باشد.

مراجع:

- [1] T. T. Duong, N. X. Tan, Quasi-Intersection Problems and Fixed Point Theorems Concerning Separately Scalar Weakly l.s.c and u.s.c mappings, Acta Mathematica Vietnamica, (2019).
- [2] A. Gurraggio, N. X. Tan, On General Vector Quasi- Optimization Problems, Mathematical Methods of Opration Research, Vol 55 (2002) 347-358.
- [3] L. J. Lin., N. X. Tan, On quasivariational inclusion problems of type I and related problems, J. Glob. Optim, Vol 39 (2007) 393-407.
- [4] N.B. Minh, N.X. Tan, On the existence of solutions of quasi-equilibrium problems with constraints. Math. Meth. Oper. Res. 64 (2006) 17-31.
- [5] H. Mohebi, M. Vatandoost, Counterexamples on some articles on quasi-variational inclusion problems, J Glob Optim, 49 (2011) 707-712.
- [6] N. X. Tan, On the existence of solutions of quasi-variational inclusion problems, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 123 (2004) 619-638.