



پیش بینی چگونگی انتشار شایعه با تحلیل دینامیکی آن

حجت الله عبادی زاده^{۱*}، جواد شرفی^۲ سعید حسن زاده^۳

^۱گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه امام علی (ع)

Ebadizadeh.h@gmail.com

^۲گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه امام علی (ع)

javadsharafi@grad.kashanu.ac.ir

^۳گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه امام علی (ع)

Saeed_۳۰۵@yahoo.com

چکیده: یکی از پارامترهای بازی جنگ، جنگ روانی می‌باشد و انتشار شایعه یکی از ابزارهای جنگ روانی است. در این مقاله مدلی جدید از انتشار شایعه با پارامترهای پخش شایعه، ناآگاه، پخش‌کننده، متوقف‌کننده ارائه شده است. این مدل، توسیع مدل کلاسیک با پارامترهای ناآگاه، پخش‌کننده و متوقف‌کننده شایعه است که به آن عامل جدید افراد کنترل‌کننده هم اضافه شده است. در اینجا با توصیف مدل انتشار شایعه به کمک یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به تحلیل و بررسی این مدل از منظر سیستم‌های دینامیکی خواهیم پرداخت. جامعه را به سه دسته مجزای ناآگاه، پخش‌کننده و متوقف‌کننده تقسیم کرده و با تشریح سیستم مورد نظر حالت‌های پایداری سیستم را مطالعه می‌نماییم. **کلید واژه‌ها:** ناآگاه، پخش‌کننده، متوقف‌کننده، پایداری

۱. پیش‌گفتار

مدلسازی ریاضی همواره یک امر ضروری و مهم در آنالیز و بررسی سیستم‌های واقعی بوده است. برای دانستن رفتار سیستم در همان لحظه و یا لحظات آینده و حتی شبیه‌سازی سیستم‌های واقعی، مدل‌ها می‌توانند بسیار موثر باشند. در علوم مهندسی، مدل‌ها همواره برای طراحی فرآیند جدید و آنالیز فرآیندهای موجود مورد نیاز بوده و هستند. شبیه‌سازی بازی جنگ یکی از مباحث روز و پرکاربرد در سال‌های اخیر می‌باشد. یکی از پارامترهای بازی جنگ، جنگ روانی می‌باشد.

تاریخچه مطالعه مدل‌های مربوط به انتشار شایعه به بیش از ۵۰ سال برمی‌گردد. مدل انتشار شایعه در واقع بسیار شبیه به مدل‌های انتشار یک پدیده فراگیر می‌باشد. اولین مدل برای انتشار شایعه مرسوم به مدل DK می‌باشد که در

۲۰۱۰ Mathematics Subject Classification. Primary ۴۷A۵۵; Secondary ۳۹B۵۲, ۳۴K۲۰, ۳۹B۸۲.

واژگان کلیدی: ناآگاه، پخش‌کننده، متوقف‌کننده، پایداری

* حجت الله عبادی زاده

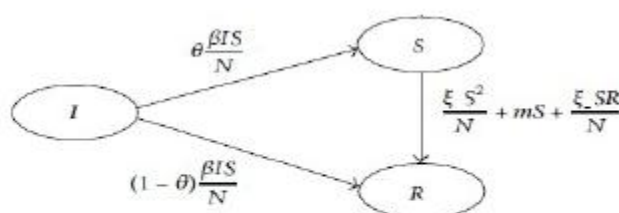
[۱] توسط دیلی[†] و کندال[‡] بیان شد. ماکي[§] و تامسون^{**} در [۲] با تمرکز بر تحلیل مدل انتشار بیان شده بر اساس نظریه‌های ریاضی توانستند مدل قبلی را توسعه و مدل جدیدی را به نام مدل انتشار MK بیان کنند.

۲. مدل دینامیکی انتشار شایعه

فرض کنیم $N(t)$ بیانگر تعداد کل اعضای فضای نمونه‌ای مورد نظر ما در زمان t باشد که به سه دسته مجزا با عوامل ناآگاه^{††}، پخش کننده^{‡‡} و متوقف کننده^{§§} تقسیم شده باشد که به ترتیب با نمادهای $I(t)$ ، $S(t)$ و $R(t)$ نشان خواهیم داد. در واقع

$$N(t) = I(t) + S(t) + R(t),$$

می‌باشد. شکل زیر، طرح انتشار یک شایعه در یک فضای نمونه را بیان می‌کند:



شکل ۱. طرح انتشار شایعه در یک فضای نمونه

در واقع با روبرو شدن یک ناآگاه با یک پخش کننده شایعه، تغییراتی در تعداد ناآگاهان ایجاد خواهد شد که این تغییرات متناسب با تعداد پخش کننده‌ها و تعداد ناآگاهان می‌باشد. عبارت $\frac{\beta}{N} IS$ به همین موضوع اشاره دارد. از طرفی هر ناآگاه با شنیدن شایعه، خود می‌تواند به پخش کننده شایعه و یا متوقف کننده آن تبدیل شود، بنابراین با در نظر

[†] Dalay

[‡] Kendal

[§] Maki

^{**} Thomson

^{††} Ignorant

^{‡‡} Spreader

^{§§} Stifler

گرفتن این واقعیت و با فرض اینکه $\theta \in [0, 1]$ احتمال پیوستن ناآگاه به دسته پخش کننده شایعه باشد، آنگاه تغییرات افزایشی $S(t)$ و $R(t)$ به ترتیب متناسب با عبارات $\theta \frac{\beta}{N} IS$ و $(1 - \theta) \frac{\beta}{N} IS$ خواهد بود. همچنین، طبیعی است که در صورت روبرو شدن دو پخش کننده شایعه با یکدیگر، جذابیت شایعه از دست رفته و نهایتاً هر دو خسته شده و به دسته متوقف کننده بپیوندند که عبارت $\frac{\xi}{N} S^2$ بیانگر این مطلب است. به همین ترتیب و با گذشت زمان عده‌ای از پخش کننده‌ها به صورت اتوماتیک و نیز با روبرو شدن با یک متوقف کننده به یک متوقف کننده شایعه تبدیل خواهند شد که عبارات mS و $\frac{\xi}{N} SR$ به ترتیب اشاره به همین موارد را دارد. این موارد را به زبان ریاضی می‌توان به صورت زیر بیان کرد:



که در آن β نرخ تبدیل ناآگاه به پخش کننده و ξ نرخ تبدیل پخش کننده به متوقف کننده می‌باشد. با توجه به مباحث بیان شده، انتشار شایعه را می‌توان به صورت دستگاه معادله دیفرانسیل زیر مدل‌بندی کرد:

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = -\beta \frac{I(t)S(t)}{N}, \\ \frac{dS(t)}{dt} = \theta \beta \frac{I(t)S(t)}{N} - \frac{\xi S^2(t)}{N} - \frac{m}{N} S(t) - \frac{\xi S(t)R(t)}{N}, \\ \frac{dR(t)}{dt} = (1 - \theta) \beta \frac{I(t)S(t)}{N} + \frac{\xi S^2(t)}{N} + \frac{m}{N} S(t) + \frac{\xi S(t)R(t)}{N}. \end{cases} \quad (4.2)$$

قبل از تحلیل و بررسی مدل بیان شده، ابتدا دستگاه مورد نظر را نرمال‌سازی و سپس شرایط اولیه دستگاه معادلات دیفرانسیل (4.2) را اعمال می‌کنیم. ابتدا قرار می‌دهیم

$$I(t) + S(t) + R(t) = 1.$$

در این صورت داریم

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = -\beta I(t)S(t), \\ \frac{dS(t)}{dt} = \theta\beta I(t)S(t) - \xi S(t)(S(t) + m + R(t)), \\ \frac{dR(t)}{dt} = (1 - \theta)\beta I(t)S(t) + \xi S(t)(S(t) + m + R(t)). \end{cases} \quad (5.2)$$

با فرض اینکه در لحظه ابتدایی فقط یک نفر به عنوان پخش کننده شایعه باشد، شرایط اولیه زیر را می‌توان برای دستگاه معادله (۵/۲) در نظر گرفت:

$$I(0) = \frac{N-1}{N}, \quad S(0) = \frac{1}{N}, \quad R(0) = 0. \quad (6.2)$$

توجه داریم در صورتی که $N \rightarrow \infty$ ، شرایط اولیه را می‌توان به صورت

$$I(0) = 1, \quad S(0) = 0, \quad R(0) = 0. \quad (7.2)$$

در نظر گرفت.

بررسی پایداری سیستم

در تمامی مدل‌های مربوط به انتشار شایعه، تعداد پخش کننده‌های شایعه ابتدا با افزایش روبه‌رو شده و سپس کاهش می‌یابند تا زمانی که به صفر برسند. در این حالت، سیستم به نقطه تعادل رسیده و تنها ناآگاهان و متوقف کننده‌ها در سیستم باقی می‌ماند. با این توصیفات، می‌توان گفت $E^* = (I^*, 0, R^*)$ نقطه تعادل سیستم (۵/۲) می‌باشد که در آن

$$I^* + R^* = 1$$

فرض کنید

$$R^* = \text{final} \{R(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = R(\infty),$$

به عنوان بیشینه مقدار توزیع شایعه باشد. به عنوان مثال، اگر $R^* = 0.8$ ، آنگاه این بدین معنی است که در نهایت ۸۰ درصد فضای نمونه از شایعه باخبر شده‌اند و ۲۰ درصد فضای نمونه هنوز ناآگاهند در حالی که پخش کننده شایعه دیگر وجود ندارد.

قضیه ۱.۳. بیشینه مقدار توزیع شایعه R^* در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$R^* = 1 - \exp \left(-\frac{\theta\beta + \xi}{\xi(m+1)} R^* \right).$$

قضیه ۲.۳. با فرض $m = 0$ ، اگر ξ ثابت باشد، آنگاه با افزایش $\theta\beta$ مقدار R^* افزایش می‌یابد و اگر $\theta\beta$ ثابت باشد، آنگاه با کاهش ξ مقدار R^* افزایش می‌یابد.

مراجع

۱. D. J. Daley and D. G. Kendall, Epidemics and rumours, Nature, vol. ۲۰۴, article ۱۱۱۸, ۱۹۶۴. U. H. Saberi Nik, S. Effati, A. Yildirim, *Solution of linear optimal control system by differential transform method*, Neural Comput. Applic., ۲۳ (۲۰۰۶) ۱۳۱۱–۱۳۱۷.
۲. D. P. Maki and M. Thompson, *Mathematical Models and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, ۱۹۷۳