



معادله‌ی لانگ‌اوین شامل دو مرتبه‌ی کسری در فواصل مختلف با استفاده از قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت

زهره کیامهر^۱ * و حمید باغانی^۲

^{۱,۲} گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، علوم کامپیوتر و آمار، دانشگاه سیستان و بلوچستان
z.kiyamehr70@gmail.com
h.baghani@gmail.com

چکیده. در این مقاله، یک معادله‌ی لانگ‌اوین شامل دو مرتبه‌ی کسری $\alpha \in (1, 2]$ و $\beta \in (1, 2]$ با شرایط اولیه را بررسی می‌کنیم. با استفاده از قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت، شرایط کافی برای وجود و منحصر بفرد بودن راه‌حل‌ها برای برخی از معادلات کسری با شرایط مرزی مختلف را ایجاد می‌کنیم.

۱. پیش‌گفتار

معادله‌ی لانگ‌اوین شامل دو مرتبه‌ی کسری با شرایط اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} D^\beta(D^\alpha + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), & 1 < \alpha \leq 2, \quad 1 < \beta \leq 2, \quad t \in [0, 1] \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(1) = \int_0^\eta x(\tau) d\tau, \quad D^{2\alpha}x(1) + \lambda D^\alpha x(1) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن D^α مشتق کسری کاپوتو از مرتبه‌ی α و $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک عملگر پیوسته و λ یک عدد حقیقی است. همچنین $D^{2\alpha}$ مشتق کسری ارائه شده توسط میلر و راس می‌باشد:

$$\begin{cases} D^\alpha u = D^\alpha u \\ D^{k\alpha} u = D^\alpha D^{(K-1)\alpha} u, \quad k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.1)$$

تعریف ۱.۱. فرض کنید $x \in C[0, 1]$ و $\alpha > 0$ انتگرال ریمان لیوویل از مرتبه‌ی α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau.$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. مشتقات کسری کاپوتو، شرایط مرزی، نقطه‌ی ثابت منحصر بفرد، معادله‌ی لانگ‌اوین. * سخنران

تعریف ۲.۱. مشتق α ام کاپوتو برای تابع x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} x^{(\alpha)}(\tau) d\tau.$$

لم ۳.۱. فرض کنید $\alpha, \beta > 0$. اگر x پیوسته باشد، آنگاه: $I^\alpha I^\beta x = I^\beta I^\alpha x = I^{\alpha+\beta} x$.

لم ۴.۱. فرض کنید $\alpha > 0$. اگر x پیوسته باشد، آنگاه: $D^\alpha I^\alpha x = x$.

لم ۵.۱. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha \in (n-1, n)$ آنگاه جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل کسری $D^\alpha x(t) = 0$ به صورت زیر می‌باشد:

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

قضیه ۶.۱. فرض کنید $(X, \preceq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. همچنین فرض کنید d یک متر در X باشد به‌طوری‌که (X, d) یک فضای متریک کامل است. فرض کنید $f: X \rightarrow X$ تابعی صعودی باشد به‌طوری‌که وجود دارد $x_0 \in X$ که $x_0 \preceq f(x_0)$. از طرفی فرض کنید وجود دارد $0 < k < 1$ به‌طوری‌که برای هر $x, y \in X$ که قابل مقایسه‌اند داشته باشیم: $(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. فرض کنید f پیوسته است یا X به‌گونه‌ای است که اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای صعودی و همگرا به x باشد، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $x_n \preceq x$. همچنین برای هر $x, y \in X$ وجود داشته باشد $z \in X$ به‌طوری‌که قابل مقایسه با x, y است، آنگاه f دارای نقطه‌ی ثابت منحصر بفرد x^* است.

لم ۷.۱. $x(t)$ جوابی از معادله‌ی ۱.۱ است اگر و تنها اگر $x(t)$ یک جواب غیر خطی از معادله‌ی انتگرالی زیر باشد:

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau \\ & + t^\alpha \left[\int_0^\eta x(\tau) d\tau - 1 + \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+2)} \right. \\ & \left. + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\eta (1-\tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right] \\ & - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \left[\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau + \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \right] + t. \end{aligned}$$

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $x(t)$ جوابی از معادله‌ی ۱.۱ باشد بنا به لم ۴.۱ داریم:

$$\begin{aligned} D^\beta (D^\alpha + \lambda)x(t) - f(t, x(t)) &= 0 \\ D^\alpha x(t) + (t) - I^\beta f(t, x(t)) &= c_0 + c_1 t \end{aligned}$$

۵.۱ داریم: $D^\alpha x(t) + (t) - I^\beta f(t, x(t)) = c_0 + c_1 t$. از طرفی بنا به لم ۵.۱ داریم: $D^\alpha x(t) + (t) - I^\beta f(t, x(t)) = c_0 + c_1 t$. با استفاده‌ی مجدد از لم ۵.۱ خواهیم داشت:

$$x(t) = I^{\alpha+\beta} f(t, x(t)) - \lambda I^\alpha x(t) + \frac{c_0 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{c_1 t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + c_2 + c_3 t.$$

بنا به شرایط مرزی در معادله‌ی ۱.۱ داریم:

$$\begin{aligned} c_0 &= \Gamma(\alpha+1) \int_0^\eta x(\tau) d\tau - \Gamma(\alpha+1) + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)} \left[\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \Gamma(1-\alpha) \right] + \frac{\lambda \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\eta (1-\tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau, \\ c_1 &= -\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau - \Gamma(1-\alpha), \\ c_2 &= 0, \quad c_3 = 1. \end{aligned}$$

با جایگزین کردن c_0, c_1, c_2, c_3 در رابطه‌های فوق جواب معادله‌ی انتگرالی را بدست می‌آوریم. به عبارت دیگر واضح است که اگر $x(t)$ جواب معادله‌ی انتگرالی باشد، آنگاه $x(t)$ جوابی از معادله‌ی ۱.۱ است. $\square$

۲. بررسی معادله‌ی ۱.۱ برای حالت $\lambda \geq 0, \lambda < 0$

دو حالت $\lambda \geq 0$ و $\lambda < 0$ و x_0, y_0 را به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که به کمک فرضیات زیر بتوان دو قضیه مهم که در ادامه گفته می‌شود را ثابت کنیم.
فرض ۱- $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی است که برای هر $x \in C[0, 1]$ داریم: $f(., x(.)) \in C[0, 1]$.
فرض ۲- وجود دارد $L > 0$ به طوری که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ که در آن $x \geq y$ داریم:

$$0 \leq f(t, x) - f(t, y) \leq L \cdot (x, y)$$

قضیه ۱.۲. با توجه به فرض ۱ و ۲ اگر معادله ۱.۱ یک جفت جواب بالا و پایین داشته باشد و $\lambda \geq 0, \Lambda = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2\} < 1$ در آن:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{2L}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2\lambda}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ \Lambda_2 &= \frac{L \cdot 2\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta-\alpha+1)} + \frac{2L}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2\lambda}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

بنابراین جواب منحصر بفردی در $C[0, 1]$ دارد.

برهان. برای اثبات به [۳] مراجعه کنید. $\square$

قضیه ۲.۲. بنا به فرض‌های ۱ و ۲ اگر معادله‌ی ۱.۱ یک جفت جواب بالا و پایین داشته باشد و $\lambda < 0, \Lambda = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2\} < 1$ در آن

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{2L}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda|}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ \Lambda_2 &= \frac{L \cdot 2\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta-\alpha+1)} + \frac{2L}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda|}{\Gamma(\alpha+1)}, \end{aligned}$$

بنابراین یک جواب منحصر بفرد در $C[0, 1]$ دارد.

برهان. برای اثبات به [۳] مراجعه کنید. $\square$

مثال ۳.۲. معادله‌ی مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} D^{\frac{8}{7}}(D^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{4})x(t) = \frac{1+x(t)}{6(1+t)^4}, & 0 < t < 1, \\ x(0) = x(1) = 0, & D^{\frac{3}{2}}x(1) + \frac{1}{4}D^{\frac{3}{4}}x(1) = 0. \end{cases} \quad (۱.۲)$$

$$f(t, x) = \frac{1+x}{6(1+t)^4}, \alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{8}{7}, \lambda = -\frac{1}{4}, L = \frac{1}{6}.$$

واضح است که:

$$0 \leq f(t, x) - f(t, y) \leq \frac{1}{6}(x, y), \quad \Lambda = 0.9392198383 < 1.$$

بنا به محاسبات ساده خواهیم داشت: $(x_0(t), y_0(t)) = (-1, 1)$ یک جفت جواب بالا و پایین معادله‌ی (۱.۲) است. همچنین به کمک قضایای گفته شده، خواهیم داشت که معادله‌ی (۱.۲) دارای جواب منحصر بفرد در $[0, 1]$ است.

مراجع

1. A. Amini-Harandi, H. Emami, A fixed point theorem for contraction type maps in partially ordered metric spaces and application to ordinary differential equations, *Nonlinear Anal*, 72 (2010) 2238-2242.
2. H. Baghani, Existence and uniqueness of solutions to fractional Langevin equations involving two fractional orders. *J. Fixed point Theory Appl*, 20 (2018) 4256-4262.
3. H. Baghani, Z. Kiyamehr, Existence of solutions of BVPs for fractional Langevin equations involving Caputo fractional derivatives, Preprint submitted to *Electronic Journal of Qualitative theory of Differential Equations*, 18 (2018).
4. O. Baghani, On fractional Langevin equation involving two fractional orders, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat*, 42 (2017) 675-681.