



ارزیابی برخی روش‌های طیفی در حل مسایل کنترل بهینه تنظیم کننده خطی-درجه دوم کسری

شهربانو کرمی^{۱*} و علیرضا فخارزاده جهرمی^۲

^{۱,۲} گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز
^۱ sh.karami@sutech.ac.ir, ^۲ a-fakharzadeh@sutech.ac.ir

چکیده. مسایل کنترل بهینه تنظیم کننده خطی-درجه دوم رده‌ای مهم از مسایل کنترل بهینه هستند که به وفور در کاربردها، خود را نشان داده‌اند؛ اما هنوز مشخص نشده که چه روش‌هایی جهت حل مسایل کنترل بهینه متضمن این نوع معادلات کسری مفید هستند. نظر به کاربردهای عددی پیشین، در این پژوهش روش‌های طیفی هم‌محلی لژاندر، شبه‌طیفی چبیشف کسری و طیفی تاو بر پایه ماتریس عملیاتی مشتق کسری چندجمله‌ای‌های برنشتاین که برای تبدیل مساله کنترل بهینه به یک دستگاه معادلات جبری بکار گرفته می‌شوند، مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرند. همچنین مثال‌های عددی پرکاربرد برای ارزیابی دقت و کارایی روش‌ها در نظر گرفته شده‌اند.

۱. مقدمه، ضرورت و اهمیت

کنترل بهینه کسری در واقع تعمیمی از کنترل بهینه کلاسیک تحت سیستم‌های دینامیکی کسری است، اما اکثر مسایل آن دارای جواب‌های تحلیلی و دقیق نیستند؛ بنابراین روش‌های تقریبی و عددی برای حل این مسایل از جایگاه خاصی برخوردار هستند و با توجه به نقش تقریب بوسیله چندجمله‌ای‌ها، روش‌های طیفی و شبه‌طیفی مختلف، معمولاً به صورت تواتر جهت حل این مسایل بکار گرفته شده است. مزیت بسیار مهم این روش‌ها در همگرایی به جواب از مرتبه نامایی است؛ انگیزه اصلی در استفاده از این دسته روش‌ها، تبدیل مساله اصلی به یک دستگاه معادلات جبری می‌باشد. نظر به کارایی توابع متعامد و کاربردهای متنوع آن‌ها، چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبیشف از جمله پرکاربردترین خانواده‌ها از این نوع توابع می‌باشند. این چندجمله‌ای‌ها به دلیل خواص بسیار مناسب در تقریب توابع و سادگی ذاتی، به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته‌اند؛ به علاوه، صفرهای این چندجمله‌ای‌ها، نقش اساسی در روش‌های طیفی دارند. اما گرچه چندجمله‌ای‌های برنشتاین برخلاف چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبیشف، متعامد نیستند، لیکن دارای خواص مفید دیگری مانند مجموع واحد، تقارن، نامنفی بودن و دقت خطی می‌باشند و این چندجمله‌ای‌ها دارای انعطاف‌پذیری بیشتری در اعمال شرایط مرزی بوده و محاسبات به وسیله آن‌ها دارای پایداری بیشتری نسبت به سایر چندجمله‌ای‌ها می‌باشد. بر این اساس در سال‌های اخیر، شاهد فعالیت‌های در این زمینه توسط محققان هستیم. از جمله در ۲۰۱۲ علیپور و همکاران بر اساس ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای‌های برنشتاین، سویلیم و همکاران در ۲۰۱۵ روش طیفی هم‌محلی

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 49J15; Secondary 34A08, 65N35.

واژگان کلیدی. کنترل بهینه کسری، چندجمله‌ای‌های لژاندر، چبیشف و برنشتاین، روش‌های طیفی و شبه‌طیفی.
* سخنران

لژاندر، رخشان و عفتی در ۲۰۱۸ روش هم‌محلی لاپلاس و حبیب‌لی و نوری اسکندری در ۲۰۱۹ روش شبه‌طیفی چبیشف کسری را ارایه نمودند. تنوع روش‌های طیفی و شبه‌طیفی و نوع متنوع کارکرد آن‌ها در حیطه کنترل بهینه کسری، نیازمند یک مقایسه بین کارایی آن‌ها براساس مسایل آزمونی پایه‌ای است. این امر وقتی مهم است که در کاربردها (نظیر درمان در پزشکی، تنظیم راکتورها، مباحث مربوط به توربین‌های بادی و...) نیازمند تعیین جواب از روشی مطمئن باشیم (توجه شود که در حالت کسری اطمینان اکثراً در مقایسه با حالت $\alpha = 1$ ارایه شده است و نه برای تمام مقادیر α). در این مقاله، برآنیم تا مقایسه‌ای علمی از کاربرد سه روش ذکر شده برای حل رده مسایل پراهمیت کنترل بهینه تنظیم‌کننده خطی-درجه دوم کسری را ارایه دهیم.

۲. مفاهیم مقدماتی

۱.۲. یک مساله کنترل بهینه تنظیم‌کننده خطی-درجه دوم کسری، به صورت زیر است [۴]:

$$\min J(u) = x^T(T)F(T)x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t))dt \quad (1.2)$$

$$\text{s.to : } {}^C D_t^\alpha x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0,$$

که در آن $x(t)$ متغیر وضعیت، $u(t)$ متغیر کنترل، ماتریس‌های $Q(t)$ و $R(t)$ به ترتیب نیمه معین مثبت و معین مثبت و $0 < \alpha \leq 1$ می‌باشند.

۲.۲. شرط لازم و کافی بهینگی. برای تعیین جواب (۱.۲)، به روش غیرمستقیم طبق اصل بیشینه پونتریاگین کسری کافی است دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری زیر با متغیر هم‌وضعیت $\lambda(t)$ حل شود [۴]:

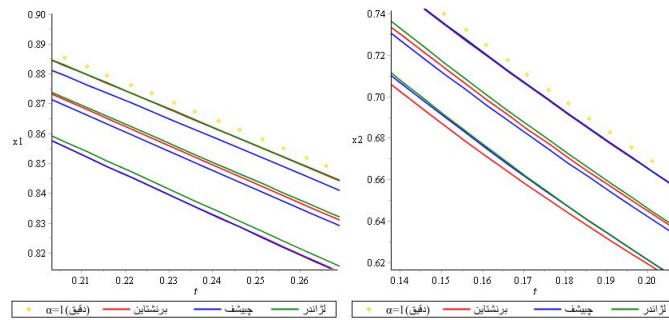
$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha x(t) &= A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)u(t) \\ {}^C D_T^\alpha \lambda(t) &= Q(t)x(t) + A^T(t)\lambda(t) \\ x(0) &= x_0, \quad \lambda(T) = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

از آن‌جا که تابعی هدف (۱.۲) محدب می‌باشد، شرایط لازم ذکر شده برای بهینگی، کافی نیز هستند.

۳.۲. معرفی روش‌ها. به دلیل کمبود فضا، از معرفی اجمالی سه روش و ویژگی‌های تحلیلی آن‌ها از جمله همگرایی که در ارایه شفاهی بیان می‌گردد، صرف‌نظر شده است و در این نوشته صرفاً به مراجع [۱]، [۲] و [۵] ارجاع داده می‌شوند.

۳. مقایسه عددی

به منظور مقایسه بین دقت و کارایی روش‌ها، چند نوع مختلف از مسایل کنترل بهینه کسری که در مقالات متعدد آورده شده‌اند به عنوان مسایل آزمونی اختیار شدند. در هر سه روش تعداد پایه‌ها را پنج در نظر گرفته و پیاده‌سازی‌های مربوطه با نرم‌افزار میپل ۱۷ انجام گردید. دستگاه معادلات حاصل نیز از روش تکراری نیوتون حل شد.



شکل ۱: نمودار بزرگ‌نمایی شده بررسی همگرایی x_1 و x_2 برای مقادیر مختلف α در مثال ۱.۳

مثال ۱.۳.

$$\text{Min } J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt, \quad (1.3)$$

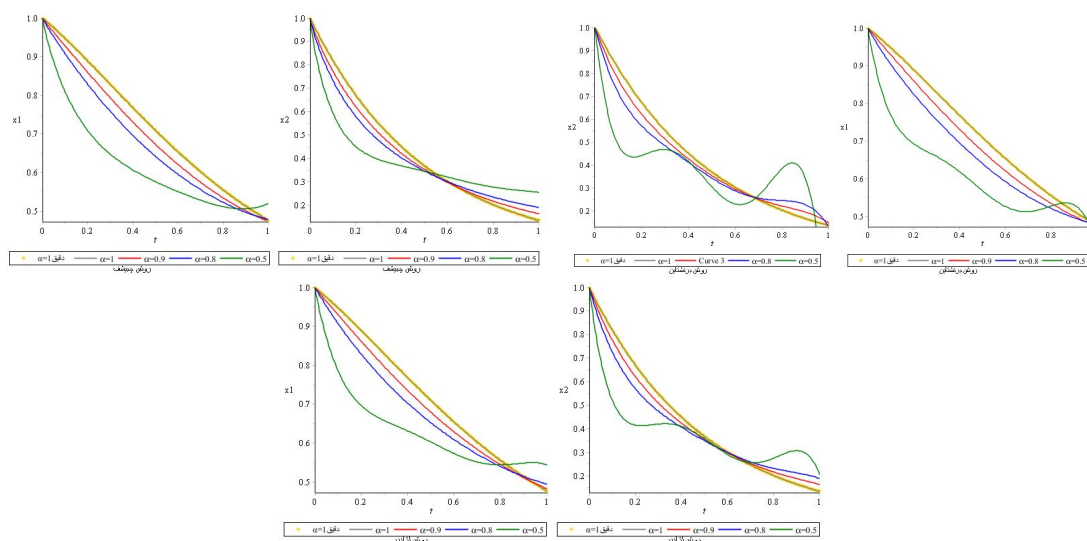
$$S. \text{ to } : {}^C D_t^\alpha x_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) + u(t),$$

$${}^C D_t^\alpha x_2(t) = -2x_2(t), \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1.$$

حل این مساله در بیش از چهار مقاله و با روش‌های مختلف بررسی شده است. جواب دقیق برای $\alpha = 1$ به صورت $x_2(t) = e^{-2t}$ و $x_1(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-\sqrt{2}t} + \frac{1}{3}e^{\sqrt{2}t}$ می‌باشد [۳]. خطای مطلق متغیرهای وضعیت برای $\alpha = 1$ بین هر سه روش مقایسه شده است. در بررسی شهودی همگرایی، نتایج بدست آمده برای متغیرهای وضعیت برای $\alpha = 0.99$ ، 0.95 ، 0.9 از هر روش و جواب دقیق در شکل ۱ رسم شده است. جواب‌های بهینه تقریبی بدست آمده با هر سه روش به ازای ۱ و $\alpha = 0.9$ ، 0.8 ، 0.5 در شکل ۲ رسم شده است که نشان می‌دهند وقتی α به سمت ۱ میل می‌کند، جواب‌های بهینه تقریبی به جواب بهینه دقیق نزدیک می‌شوند و مقدار تقریباً بهینه تابعی هدف نیز به مقدار بهینه دقیق 0.4319835549 میل می‌کند (جدول ۱). از بررسی جدول و شکل‌ها نتیجه می‌شود که روش برنشتاین به ازای $\alpha = 1$ و روش لژاندر برای α های کسری نتایج بهتری نسبت به دو روش دیگر دارند. این نتایج توسط مثال‌های دیگر نیز تایید شده‌اند (مثال‌های بیشتر در آرایه شفاهی بیان می‌شوند).

جدول ۱: مقدار تقریباً بهینه تابعی هدف برای مقادیر مختلف α و خطای مطلق در مثال ۱.۳

α	برنشتاین	چبیشف	لژاندر
۱	۰/۴۳۱۹۸۷۲۴۳۰	۰/۴۳۱۹۷۶۸۱۱۷	۰/۴۳۱۹۸۷۲۴۹۲
۰/۹۹	۰/۴۲۹۰۰۸۰۳۵۲	۰/۴۲۴۲۸۰۵۷۵۵	۰/۴۲۹۲۲۴۰۹۴۹
۰/۹	۰/۴۰۳۰۸۷۹۳۰۳	۰/۴۰۲۸۲۵۳۸۴۳	۰/۴۰۵۱۳۴۳۲۸۷
۰/۸	۰/۳۷۶۳۰۷۰۶۵۲	۰/۳۸۰۳۶۰۲۵۴۷	۰/۳۸۰۰۹۸۹۳۰۱
خطای مطلق	$3/688083 \times 10^{-6}$	$6/743160 \times 10^{-6}$	$3/694331 \times 10^{-6}$



شکل ۲: نمودار بررسی همگرایی روش‌های چبیشف، برنشتاین و لژاندر برای متغیرهای وضعیت به ازای مقادیر مختلف α مثال ۱.۳

۴. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، سه روش برای حل مسایل کنترل بهینه تنظیم‌کننده خطی-درجه دوم کسری مقایسه شدند. نتایج حاصل از مقایسه تحلیلی ویژگی‌ها و مسایل آزمونی به صورت خلاصه مویده آن است که با توجه به همگرایی قوی هر سه روش، روش برنشتاین به ازای $\alpha = 1$ و روش لژاندر به ازای مقادیر غیر صحیح α تقریب‌های بهتری نسبت به دو روش دیگر ارائه می‌دهند.

مراجع

1. M. Alipour, D. Rostamy, D. Baleanu, *Solving multi-dimensional fractional optimal control problems with inequality constraint by Bernstein polynomials operational matrices*, J. Vib. Control., **19**(16) (2012) 2523–2540.
2. N.H. Sweilam and T.M. Al-Ajami, *Legendre spectral-collocation method for solving some types of fractional optimal control problems*, J. Adv. Res., **6** (2015) 393–403.
3. A. Alizadeh and S. Effati, *An iterative approach for solving fractional optimal control problems*, J. Vib. Control., **24**(1) (2016) 18–36.
4. S.A. Rakhshan and S. Effati, *The Laplace-collocation method for solving fractional differential equations and a class of fractional optimal control problems*, Optim. Control. Appl. Meth, **39**(2) (2018) 1110–1129.
5. M. Habibli and M.H. Noori Skandari, *Fractional Chebyshev pseudospectral method for fractional optimal control problems*, Optim. Control. Appl. Meth, **40**(10) (2019) 558–572.